日本オペレーションズ・リサーチ学会
2022年 春季研究発表会

放射環状ネットワークの距離分布

01102840　筑波大学　腰塚武志　　KOSHIZUKA Takeshi

1.　はじめに

筆者は最近，文献 [1] を脱稿した．これを書き終える段階で，やり残したことや，もっと先に進めなければならない点を多々自覚した．これらの中で，ここで論じる放射環状パターンについてはやり残しているので，ここで距離分布を算出する．

2.　放射環状ネットワーク

文献 [1] で放射状と格子状のパターンに関して距離分布と通過量分布を手計算できる規模のもので比較した（後述図 5）．この 2 つは同じ長さでパターンを構成できたのだが放射環状パターンでもリンクの長さを，すべて a として図 1(a) のようなパターンを考えることができる．

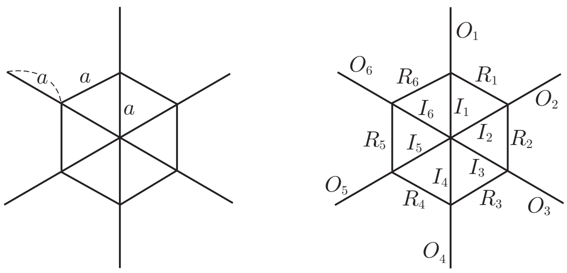

図 1　放射環状ネットワーク

3.　計算の方針

計算の見通しをよくするため図 1(b) のようにパターンを構成する 18 本のリンクを 3 つのグループに分け，放射状の外側のリンクに O_1 から時計回りに O_6 まで番号を付け，中心側のリンクにも時計回りに I_1 から I_6 までとする．同様に環状のリンクも R_1 から R_6 までとし，これらを

$$\begin{aligned} \mathbf{O} &= \{O_1,\ O_2, \ldots,\ O_6\} \\ \mathbf{I} &= \{I_1,\ I_2, \ldots,\ I_6\} \\ \mathbf{R} &= \{R_1,\ R_2, \ldots,\ R_6\} \end{aligned} \tag{1}$$

とおく．

するとこの放射環状パターンの対称性から，同じグループに属するリンクは，このネットワーク上での役割というか機能は同等である．そこで例えば 1 つのリンク L_i が $L_i \in \mathbf{O}$ だとすれば，L_i と $\mathbf{O}$, $\mathbf{I}$, $\mathbf{R}$ のそれぞれの各リンクまでの距離分布は $L_j \in \mathbf{O}(i \neq j)$ と $\mathbf{O}$, $\mathbf{I}$, $\mathbf{R}$ のそれぞれの各リンクまでの距離分布と等しい．そこでこれを用いると大幅に計算量を減らすことができる．

4.　各リンクペアーの距離分布

前節のように距離分布を各リンクペアーに分解して考えると，距離分布の種類は 6 系統 10 種類となる．そのうちの多くは今までにも随所で議論しているので，このパターンに典型的なものとして以下の 2 種類をここでは述べることにしたい．まず 1 つは図 2 の (a) のように正三角形の 2 辺間で 1 つの辺（リンク）から他の辺 (リンク）までの片道の距離分布であり，文献 [1] の一般論におけるパターン 2-2 の簡単な場合である．この時の距離分布を $f(r)$ とすると

$$f(r) = \begin{cases} r & (0 < r \leq a) \\ a & (a < r < 1.5a) \end{cases} \tag{2}$$

となり，これを図示すると図 2 の (b) のようになる．また接する 2 辺が距離 a 離れて，他方の辺同士が図 2(a) の a から $2a$ 離れる場合も出てくるが，この時は式 (2) において距離 r を $r - a$ に置き換えれば距離分布を求めることができる．

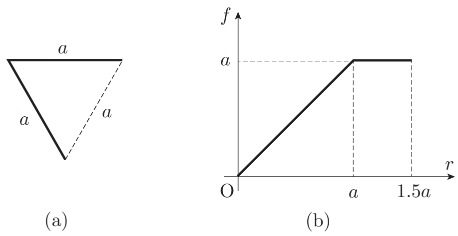

図 2　正三角形 2 辺（リンク）の距離分布

つぎにもう少し複雑なのは図 3 の (a) の場合で，環状内部の 2 リンク間の距離分布である．これは文献 [1] の一般論のパターン 3 の簡単な場合であり，距離分布 $f(r)$ は

$$f(r) = \begin{cases} 3(r - a) & (a < r \leq 1.5a) \\ 3a - r & (1.5a < r < 2a) \end{cases} \tag{3}$$

となっている．これは図 3 の (b) のように示すことができる．あとは前節のように $18\times\ 18$ のペアーを少数の代表例をもとに場合分けし，加えていけばいい．

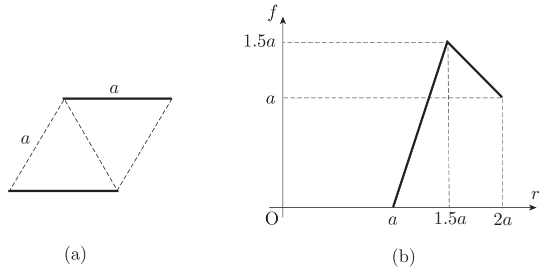

図 3　中心部 2 リンク間の距離分布

5.　放射環状ネットワークの距離分布

以上により放射環状ネットワークの距離分布 $f(r)$ は

$$f(r)=\begin{cases}66r+36a & (0<r\leq a)\\ 186r-84a & (a<r\leq 1.5a)\\ 168a-6r & (1.5a<r\leq 2a)\\ 288a-78r & (2a<r\leq 2.5a)\\ 276a-78r & (2.5a<r\leq 3a)\\ 240a-66r & (3a<r\leq 3.5a)\\ 72a-18r & (3.5a<r<4a)\end{cases} \tag{4}$$

と計算され，これを図示すると図 4 のようになる．

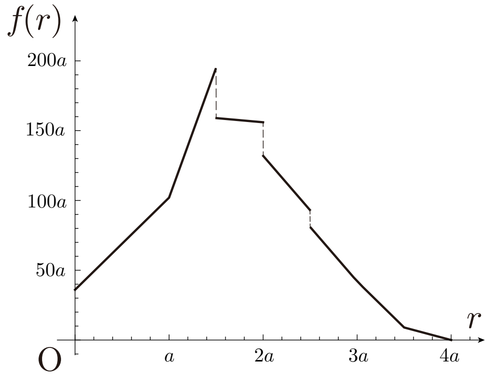

図 4　放射環状ネットワークの距離分布

これより

$$\int_0^{4a} rf(r)\mathrm{d}r = 531a^3 \tag{5}$$

が得られるので，平均値は上式を全体 $(18a)^2$ で割って

$$\bar{r}=\frac{531a^3}{324a^2}=\frac{59}{36}a\approx 1.64a \tag{6}$$

と求めることができる．

6.　放射環状，放射状，格子状の比較

ここで求めた放射環状ネットワークとこれまでに求められている図 5 の放射状と格子状のパターンを比較しよう．図 5 の放射状と格子状はそれぞれ総延長が $36b$ なので，放射環状において図 6 のように $a=2b$ とすれば総延長が等しくなる．そしてこれらのネットワークの距離分布を比較すると図 7 のようになり，距離の平均値は短い順に放射 (R):$2.8b$，放射環状 (C):$3.3b$，格子 (G):$3.9b$ となっている．

図 7 をみると距離分布からは放射環状 (C) が放射状 (R) と格子状 (G) の中間にあるようにみえる．ただ総延長が等しいという制限だけなので，パターンの持つ本質的な性質がすべて明らかになったとは言えないだろう．特にネットワーク上で最も長い直線距離が放射環状で $8b$ であるのに対し，他の 2 つが $6b$ なのが気になるところである．

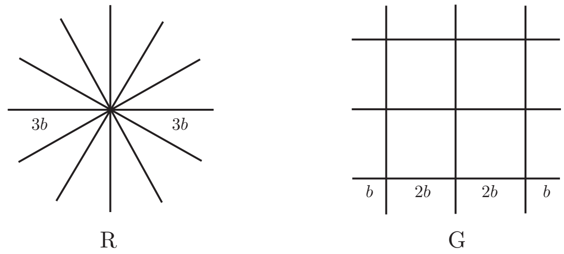

図 5　放射状 (R) と格子状 (G) ネットワーク

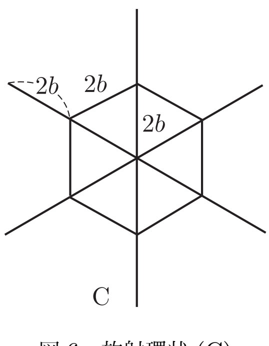

図 6　放射環状 (C)

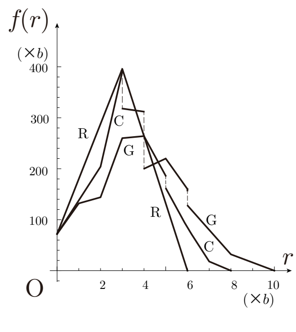

図 7　距離分布の比較

7.　おわりに

放射状と格子状を比較するとき「通過量分布」も欠かせない．これについても後ほど発表するつもりである．

参考文献

[1] 腰塚武志：『距離分布からみる空間』，筑波大学出版会 (2022).（6 月刊行予定）