日本オペレーションズ・リサーチ学会
2022年 春季研究発表会

ホーム・アウェイ方式の総当たり戦における移動回数を考慮した公平なスケジュール作成

筑波大学　*馬 海俊夫　MA Haijunfu
筑波大学　薛 菲　XUE Fei
01206770　筑波大学　繁野 麻衣子　SHIGENO Maiko

1.　はじめに

スポーツスケジューリングでは，主に総当たり戦 (round robin tournament) に対して，公平性や収益，費用の観点からスケジュールを作成する [1]. 総当たり戦で扱われるホーム・アウェイ (home and away) 方式では，各チームは本拠地（ホーム）をもち，各対戦はどちらかのチームの本拠地で開催する．あるチームの本拠地で開催するゲームをホームゲーム，対戦相手の本拠地で開催するゲームをアウェイゲームとよぶ．ホームゲームもしくはアウェイゲームの連続をブレークという．ホームゲームかアウェイゲームかは試合結果に影響するとされ，チーム間での公平性も考慮してなるべくブレークを避けるスケジュール作成は多く研究されている．ところが，ブレーク数を少なくすると移動回数が多くなることから，ブレーク数と移動回数のバランスを取ることが重要であり，連続ブレーク数に制限を設けた中でブレーク数を最大化する問題もある [2, 3].

本研究では，ブレークの連続を許さない中でブレーク数を最大化する問題を対象とする．

2.　問題設定

チーム数 $n(\geq 4)$ は偶数とする．各試合日（スロット）ではすべてのチームがいずれかのチームと対戦し，期間中チームの各ペアの試合がちょうど 1 回おこなわれる．よって，スロット数は $n-1$ となる．あるチームがスロット $k-1$ とスロット k の両方でホームゲームもしくは両方でアウェイゲームのとき，スロット k でブレークをもつという．ここで，

条件 1　各チームでブレークが連続しない

条件 2　各チームでホームゲーム数とアウェイゲーム数の差が 1

を満たすなかでブレーク数を最大とするスケジュールを作成する．条件を満たすとき，各チームのブレーク数は高々 $\frac{n}{2}-1$ となるが，すべてのチームが $\frac{n}{2}-1$ 個のブレークをもつスケジュールは存在せず，また，4 チームが $\frac{n}{2}-1$ 個のブレークをもち残りのチームが $\frac{n}{2}-2$ 個のブレークをもつスケジュールは存在することが知られている [2].

以下，チームの集合を T, スロットの集合を K とする．

3.　解法

対戦表作成で用いられる手法 [4] に従う．ここで，ホーム・アウェイパターンとは，長さ $n-1$ の列でその要素がホームゲームかアウェイゲームを表す．ホーム・アウェイパターンを n 個集めて，各チームに対応させたものがホーム・アウェイ表 (home-away table: HAT) である．HAT に基づきホーム・アウェイ方式の総当たり戦のスケジュールを作成できるとき，この HAT は許容であるという．最大ブレーク数を求めるために以下の手順で許容 HAT をつくる．

1. ブレーク数が一定数以上のホーム・アウェイパターンを列挙する
2. 1. で列挙したパターンを組み合わせて HAT を作成する
3. 2. で作成した HAT が許容かを確認する

条件 1,2 を満たし，ブレーク数が $\frac{n}{2}-1$ であるパターンの集合を P, ブレーク数が $\frac{n}{2}-2$ であるパターンの集合を P' とする．P のパターンを可能な限り含み，残りのパターンを P' から選択することで許容な HAT を作成することを目指す．

3.1.　ホーム・アウェイパターンの列挙

$n=4l$ のときに，P を列挙する．0011 を l 個並べた列を基礎列とよぶ．ただし，基本列で 1 はホームゲーム，0 はアウェイゲームを表す．このとき，$\frac{n}{2}$ 箇所にブレークがあるが，そのなかの一つを選択してそのスロットの要素を削除すること

で，条件 1,2 を満たすパターンが $\frac{n}{2}$ 通り得られる．1 と 0 を入れ替えることで，別の $\frac{n}{2}$ 通りのパターンが得られる．そして，P の要素はすべてこの操作から得られることもわかる．

$n=4l+2$ のときには，1100 を l 個並べた列の最後に 11 を加えて，n の長さの基礎列を得る．この基礎列では 1 が 0 よりも 2 多いので，ブレークにある 1 の要素を削除することで，条件 1,2 を満たすパターンを $\frac{n+2}{4}$ 通り得る．1 と 0 を入れ替えることで，別の $\frac{n+2}{4}$ 通りパターンが得られる．このことより，ブレーク数が $\frac{n}{2}-1$ のパターンの数は以下のように表せる．

$$|P| = \begin{cases} n & n \equiv 0 (\mathrm{mod} 4) \\ \frac{n}{2}+1 & n \equiv 2 (\mathrm{mod} 4) \end{cases}$$

同様に P' の列挙もでき，ブレーク数が $\frac{n}{2}-2$ のパターンの数は以下のように表せる．

$$|P'| = \begin{cases} 2(\binom{\frac{n}{4}+1}{2}\binom{\frac{n}{4}}{1} + \binom{\frac{n}{4}+1}{3}) & n \equiv 0 (\mathrm{mod} 4) \\ 4\binom{\frac{n+2}{4}}{2}\binom{\frac{n+2}{4}}{1} & n \equiv 2 (\mathrm{mod} 4) \end{cases}$$

3.2. ホーム・アウェイ表の作成

許容な HAT を構成する最大要素数のパターンの集合 $N \subseteq P$ を求める．そのために，許容な HAT の必要条件 [5] を利用する．$H(N,k)$, $A(N,k)$ をそれぞれ N に含まれるパターンでスロット k でのホームゲーム数，アウェイゲーム数とする．このとき，N が許容な HAT を構成するならば

$$\sum_{k \in K} \min\{H(N,k), A(N,k)\} \geq \binom{|N|}{2} \qquad (1)$$

を満たす．(1) 式を満たす最大要素数 $t_{\max} = \max\{|N| \mid N \subseteq P, (1) 式 \}$ を求め，要素数 $t_{\max}$ で (1) 式を満たす N を列挙する．そして，P' のパターンと合わせて，HAT S を構成する．

3.3. 対戦可能性の確認

HAT S が許容かどうかを確認するモデルでは，チーム i と j $(i \neq j)$ がスロット k で対戦するか否かの 0-1 変数 x_{ijk} を用いる．ここで，S に対して，

$$s_{ik} = \begin{cases} 1 & チーム\ i\ のスロット\ k\ はホームゲーム \\ 0 & チーム\ i\ のスロット\ k\ はアウェイゲーム \end{cases}$$

とする．

$$\begin{aligned} &\sum_{k \in K} x_{ijk} = 1 && i,j \in T \\ &\sum_{j \in T} x_{ijk} = 1 && k \in K \\ &x_{ijk} \leq s_{ik} + s_{jk} && i,j \in T, k \in K \\ &x_{ijk} \leq 2 - s_{ik} - s_{jk} && i,j \in T, k \in K \\ &x_{ijk} = x_{jik} && i,j \in T, k \in K \end{aligned}$$

を満たす 0-1 変数が存在すれば S は許容である．

4. 結果

$n \leq 36$ に対して前節で示した手法で最大ブレーク数が得られた．$n \equiv 2 (\mathrm{mod} 4)$ のとき，P のパターンすべてを用いて，これに P' から適切な $\frac{n}{2}-1$ パターンを追加することで，ブレーク数最大の HAT が得られた．そこで，最大ブレーク数は n が大きくなっても $(\frac{n}{2}-1)(\frac{n}{2}+1)+(\frac{n}{2}-2)(\frac{n}{2}-1) = (n-1)(\frac{n}{2}-1)$ となることが予想される．$n \equiv 0 (\bmod 4)$ のときの結果を表 1 に示す．$t_{\max}$ に規則性がなく，最大ブレーク数の一般式は予想できないが，計算できた n の範囲では [2] で示されている最大ブレーク数の下限よりも大きいことがわかった．より大きな n の最大ブレーク数を求めるために，大きな n に対応できる解法や $t_{\max}$ の規則性を見出すことは今後の課題である．

表 1: $n \equiv 0 (\bmod 4)$ のときの $t_{\max}$ と最大ブレーク数 B_n

n	4	8	12	16	20	24	28	32	36
$t_{\max}$	4	6	8	10	12	16	16	20	22
B_n	4	22	56	106	172	256	352	468	598

参考文献

[1] 今堀: スポーツスケジューリング，オペレーションズ・リサーチ，65-3 (2020), 157–162.

[2] R.A. Russell and J.M.Y. Leung: Devising a cost-effective schedule for a baseball league, Oper Res, 42 (1994), 614–625.

[3] S. Urrutia, and C.C. Ribeiro: Maximizing breaks and bounding solutions to the mirrored traveling tournament problem, Discret. Appl. Math., 154 (2006), 1932–1938.

[4] G. L. Nemhauser and M. A. Trick. Scheduling a major college basketball conference, Oper Res, 46 (1998), 1–8.

[5] R. Miyashiro, H. Iwasaki and T. Matsui: Characterizing feasible pattern sets with a minimum number of breaks, LNCS, 2740 (2003), 78–99.