総当たりリーグ戦における 残存影響度最小化問題に対する反復局所探索法

名古屋大学 *曹贇健 CAO Yunjian
05000348 静岡大学 呉偉 WU Wei
01704163 名古屋大学 柳浦睦憲 YAGIURA Mutsunori

1. 問題説明

総当たりリーグ戦は，サッカーや野球などのスポーツ競技に幅広く使用されている．総当たりリーグ戦の対戦表を設計する際，開催地の選定や移動距離など考慮すべき要因は数多く存在し，チーム間の公平性も重視すべきものの一つである．

対戦相手の直前対戦チームによる影響を，**残存作用**（carry-over effect, COE）という．残存作用を用いた指標は公平性を評価する重要なものとして知られている [5]．例えば，表 1 に示す **Kirkman 対戦表**は約 170 年前に Kirkman [3] が提案したものであるが，チーム 1 の対戦相手が 1 との対戦の直前に対戦する相手がチーム 6 に偏っており（表 1 太字），残存作用の観点からは改善の余地がある．スケジュールの残存作用を評価するために，Russell [5] が提案した**残存行列**（carry-over effect matrix）の下で**残存影響度**（carry-over effect value）を算出する方法が広く使用されている．n チーム (チーム $0, 1, \ldots, n-1$) の対戦表 x における残存行列の要素 $a_{ij}(x)$ は，対戦相手 i の直後に対戦相手 j が現れる行の数を表す．多重総当たり戦等で対戦表が繰り返し使われる場合を考慮し，ラウンド $n-1$ の直後にラウンド 1 があると仮定する．n チームの総当たりリーグ戦の対戦表 x に対する残存影響度 $v_{\mathrm{coe}}(x)$ は

$$v_{\mathrm{coe}}(x) = \sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{n-1}(a_{ij}(x))^2 \tag{1}$$

と定義できる．

本研究では，残存影響度が最小となる対戦表を求める問題（carry-over effect value minimization problem, COEMP）を対象として，反復局所探索法に基づく効率の良い発見的解法を提案する．

表 1: 8 チームの Kirkman 対戦表

チーム	R1	R2	R3	R4	R5	R6	R7
0	7	2	4	**6**	**1**	3	5
1	6	7	3	5	0	2	4
2	5	0	7	4	**6**	**1**	3
3	4	**6**	**1**	7	5	0	2
4	3	5	0	2	7	**6**	**1**
5	2	4	**6**	**1**	3	7	0
6	1	3	5	0	2	4	7
7	0	1	2	3	4	5	6

2. グラフに基づく対戦表の作成

本研究では，チーム数 n を偶数とする．チーム集合 $\{0, 1, \ldots, n-1\}$ を頂点集合とする完全グラフ K_n を考え，辺 $\{i, j\}$ はチーム i, j 間の試合を表現するものとする．色集合 $C = \{c_1, c_2, \ldots, c_{n/2}\}$ が与えられるとき，K_n の各辺 $\{i, j\}(i < j)$ を色

$$\begin{cases} c_{\min\{j-i,\, n-1-(j-i)\}} & \text{if } j \le n-2 \\ c_{n/2} & \text{if } j = n-1 \end{cases}$$

で彩色したものを辺色付き完全グラフ $K_n^{\bullet}$ と呼ぶ．頂点 $0, 1, \ldots, n-2$ を円周上に等間隔に，頂点 $n-1$ を円の中心に配置すると，$K_n^{\bullet}$ においては，円周上の頂点対で円周上の距離が等しいものの間に張られた辺は同じ色に彩色される．このようなグラフ上のマッチングの辺の色がすべて異なる（レインボー制約）完全マッチングを**レインボー完全マッチング**（rainbow perfect matching）という．そのようなマッチングの一つ M_n^{rp} が与えられたとき，ラウンド 1 では M_n^{rp} が表す対戦を行い，ラウンド 2 以降は，1 つ前のラウンドのマッチングを時計回りに $2\pi/(n-1)$ 回転し，それに対応する対戦を行う方法を，**回転法**（circle method）という．回転法で生成される対戦表に対しては，レインボー完全マッチングの情報のみを利用して $\mathcal{O}(n)$ 時間で残存影響度の計算が可能であることが Anderson に

より示されている [1].

3. 提案手法と計算結果

本研究では，COEMP に対する反復局所探索法に基づくアプローチを提案する．

局所探索の対象をレインボー完全マッチングに限定すると，解を生成するように近傍操作を設計することが難しい．そこで，レインボー制約を緩和し，$K_n^\bullet$ に対する全ての完全マッチングを探索対象とする．また，レインボー制約を満たしていない解に対しては，評価値にレインボー制約の違反の程度を表すペナルティを加える．

提案手法で用いる近傍操作では，現在の完全マッチングから頂点 $n-1$ を含む辺とそれ以外の k 本の辺を取り除き，$k+1$ 本の辺を追加する．この近傍の近傍サイズは $\mathcal{O}(n^k)$ であり，現在の解の情報を利用することにより近傍解 1 つの評価は $\mathcal{O}(k)$ 時間でできるため，1 ラウンド時間（one-round time [6]）は $\mathcal{O}(kn^k)$ となる．本研究では，$k=2$ と設定する．また, 近傍内で改善解を発見すると直ちに移動する即時移動戦略を用いる．

近傍解 M の評価に用いる評価関数を

$$f_\alpha(M) = \alpha g(M) + h(M) \qquad (2)$$

とする．ここで，$g(M)$ はレインボー制約の違反量（M 内の各色の辺数の 1 からの乖離の 2 乗和），$h(M)$ は残存影響度を相対的に評価する関数である．α はパラメータであり，探索の進行に伴いその値を適応的に調整する．

α の値を変更したのち局所探索を継続すると，直近に訪れた解を再び訪問するサイクリングの現象がしばしば起こることを観測した．そのような状況を避けるため，タブー探索における短期メモリ戦略を採用する．

評価関数に関する局所最適解に到達するたびに，キック操作として暫定解からランダムに選んだ β（パラメータ）本の辺を取り除き，β 本の辺をランダムに選んで追加することで新たな完全マッチングを構築する．

計算結果を表 2 に示す．提案手法は，全ての問題例に対して先行研究と比べて同等以上の解を得ることができた．また，$n=36, 40$ のとき，既存の最良値より良い残像影響度を持つ対戦表を得た．

表 2: 既存研究との残像影響度の比較

n	[5]	[1]	[4]	[2]	提案手法
8	**56**	**56**		**56**	**56**
10	138	**108**	**108**	**108**	**108**
12	196	**176**	**176**	**176**	**176**
14	260	**234**	254	**234**	**234**
16	**240**	**240**		**240**	**240**
18	428	**340**	400	**340**	**340**
20	520	**380**	488	**380**	**380**
22		**462**		**462**	**462**
24	684			**598**	**598**
26				**700**	**700**
28				**810**	**810**
30				**928**	**928**
32				**1054**	**1054**
34				**1254**	**1254**
36				1540	**1470**
38				**1628**	**1628**
40				1872	**1794**

参考文献

[1] I. Anderson. Balancing carry-over effects in tournaments. In F.C. Holroyd, K.A.S. Quinn, C. Rowley, and B. Webb, editors, *Combinatorial Designs and Their Applications*. Chapman & Hall, 1999, pp. 1–16.

[2] M.P. Kidd. A tabu-search for minimising the carry-over effects value of a round-robin tournament. *ORiON*, Vol. 26, No. 2, pp. 125–141, 2010.

[3] T.P. Kirkman. On a problem in combinations. *Cambridge and Dublin Mathematical Journal*, Vol. 2, pp. 191–204, 1847.

[4] R. Miyashiro and T. Matsui. Minimizing the carry-over effects value in a round-robin tournament. In *Proceedings of the 6th International Conference on the Practice and Theory of Automated Timetabling* (PATAT), pp. 460–463, 2006.

[5] K.G. Russell. Balancing carry-over effects in round robin tournaments. *Biometrika*, Vol. 67, No. 1, pp. 127–131, 1980.

[6] M. Yagiura and T. Ibaraki. Analyses on the 2 and 3-flip neighborhoods for the MAX SAT. *Journal of Combinatorial Optimization*, Vol. 3, No. 1, pp. 95–114, 1999.