日本オペレーションズ・リサーチ学会
2022年 春季研究発表会

全域木設計スケジューリング問題の近似解法

東京工業大学　*齊藤 雄介　SAITO, Yusuke
01207072　東京工業大学　塩浦 昭義　SHIOURA, Akiyoshi

1.　はじめに

近年，通信インフラネットワークは，生活をする上で必要不可欠なものになっている。しかし，大規模自然災害が起きた際に，通信インフラネットワークが損傷してしまう可能性がある。損傷してしまったネットワークについて，速やかに機能を復旧させる必要がある。これをモデル化した問題は全域木設計スケジューリング問題と呼ばれる [2]。

全域木設計スケジューリング問題では、無向グラフ $G=(V,E)$、各枝 $e \in E$ に対する非負の処理時間 p_e と重み w_e をもつ、および利用可能な同一性能のマシンの台数 k、および納期 L が入力として与えられる。1 台のマシンを使って枝 e を追加する際に p_e 時間が必要となる。マシンを利用して納期までに枝を追加して得られる全域木の重みを、できる限り小さくすることが目的である。ただし、1 つの枝を複数台のマシンで処理することはできないものとし、処理の途中での中断を禁止する。この問題は下記のように定式化される。ここで S は、G の全域木の特性ベクトルの集合を表す。

$$\begin{aligned}
\text{Min.}\quad & \sum_{i=1}^{k}\sum_{e\in E} w_e x_e^{(i)} \\
\text{s.t.}\quad & \sum_{i=1}^{k} x^{(i)} \in S, \\
& \sum_{e\in E} p_e x_e^{(i)} \le L \quad (i=1,2,\ldots,k), \\
& x^{(i)} \in \{0,1\}^E \quad (i=1,2,\ldots,k).
\end{aligned}$$

この問題は、マシンが単一という特殊ケースでも NP 困難である [1]。単一マシンの場合，この問題はナップサック制約つき最小全域木問題に一致し、厳密解法や近似解法などが盛んに研究されている。とくに、Ravi と Goemans [3] により PTAS(多項式時間近似スキーム) が提案されている。

本研究では、単一マシンの場合の PTAS を基にした、複数マシンの場合の $(1+\varepsilon,1)$-近似解法を提案する。$(1+\varepsilon,1)$-近似アルゴリズムとは、処理時間が高々$(1+\varepsilon)L$ で、重みが高々W となるような全域木 T を多項式時間で出力するアルゴリズムである。ここで、W は全域木設計スケジューリング問題の最適値を表す。

2.　単一マシンの場合の近似解法

本節では、単一マシンの場合の問題に対する、ラグランジュ緩和を利用した $(1+\varepsilon,1)$-近似解法の説明を行う。これは Ravi と Goemans [3] による。単一マシンの場合の問題は、以下のように定式化される。

$$\begin{aligned}
\text{Min.}\quad & \sum_{e\in E} w_e x_e \\
\text{s.t.}\quad & x \in S, \\
& \sum_{e\in E} p_e x_e \le L.
\end{aligned}$$

上記の定式化において不等式制約をラグランジュ緩和（乗数 $z \ge 0$）すると、以下の問題を得る。

$$\begin{aligned}
l(z) = \ \text{Min.}\quad & \sum_{e\in E}(w_e + z p_e) x_e - zL \\
\text{s.t.}\quad & x \in S.
\end{aligned}$$

このラグランジュ緩和問題は、コスト $c_e = w_e + z p_e$ に関する最小全域木問題とみなせる。$z \ge 0$ 下で $l(z)$ を最大化する。z^* を $l(z)$ を最大にする z の値とし、$c_e^* = w_e + z^* p_e$ とする。この c_e^* について以下の性質が成り立つ。これは、近似解法を構築する上で重要な性質である。

定理 1 ([3])**.** コスト c_e^* に関する最小全域木 T であって、以下の条件を満たすものが存在する。

- (T の重み) $\le l(z^*) \le W$,
- (T の処理時間) $< L + \max_{e\in E} p_e$.

定理 1 を基にして構築された $(1+\varepsilon,1)$-近似解法を Algorithm 1 に記す。本アルゴリズムの時間計算量は $\mathrm{O}(|V|^{\mathrm{O}(\frac{1}{\varepsilon})})$ である。

Algorithm 1 単一マシンの近似アルゴリズム

$E_{\mathrm{large}} \leftarrow \{e \in E \mid p_e > \varepsilon L\}$
$\Pi \leftarrow \{\pi \subseteq E_{\mathrm{large}} \mid |\pi| \le \lfloor \frac{1}{\varepsilon} \rfloor,\ \sum_{e\in\pi} p_e \le L\}$
for all $\pi \in \Pi$ **do**
  $G' \leftarrow G$ において枝集合 $E_{\mathrm{large}} \setminus \pi$ を削除し，π に含まれる枝すべてを縮約したもの
  $L' \leftarrow L - \sum_{e\in\pi} p_e$
  $z^* \leftarrow G'$ にて納期を L' にしたラグランジュ緩和問題の最適ラグランジュ乗数
  $T' \leftarrow$ コスト $c^*_e = w_e + z^* p_e$ における最小全域木の中で定理 1 の条件を満たすもの
  全域木 $T' \cup \pi$ を保存
end for
保存された全域木の中で最小重みのものを出力

3. 複数マシンの場合の近似解法

本節では、マシンの台数 k が 2 以上の定数の場合に対し、 2 節の結果を利用した $(1+\varepsilon, 1)$-近似解法を提案する。そのために、元問題の不等式制約を緩和した以下の問題を考える。

$$\begin{aligned} W_{\mathrm{MCMST}} = \ \text{Min.} \quad & \sum_{e\in E} w_e x_e \\ \text{s.t.} \quad & x \in S, \\ & \sum_{e\in E} p_e x_e \le kL. \end{aligned}$$

この問題において、すべての枝の処理時間 p_e が εL 以下であると仮定する。このとき、上記の単一マシンの問題に対する $(1+\varepsilon, 1)$-近似解 T に対し、T に含まれる枝を、マシン 1 から k まで順番に、マシンの納期 L をぎりぎり超えるところまで割り当てていくと、複数マシンの問題に対する $(1+\varepsilon, 1)$-近似解が容易に得られる。この事実を踏まえて構築されたのが、複数マシンの問題に対する $(1+\varepsilon, 1)$-近似解法である (Algorithm 2 参照)。提案した近似解法の時間計算量は $\mathrm{O}(|V|^{\mathrm{O}(\frac{k}{\varepsilon})})$ である。したがって、マシン台数 k を定数とすれば、多項式時間となる。

本研究では納期制約の下での全域木の重み最小化問題を扱ったが、全域木の重みに対する上界制約の下での納期最小化問題を考えることもできる。本稿で提案した近似解法を利用することにより、後者の問題に対する PTAS を構築することが可能である。

Algorithm 2 複数マシンの近似アルゴリズム

$E_{\mathrm{large}} \leftarrow \{e \in E \mid p_e > \varepsilon L\}$
$\Pi \leftarrow k$ 台のマシンへの枝集合の割当 $\pi = (\pi^{(1)}, \dots, \pi^{(k)})$ の集合．ただし，$\pi^{(1)} \cup \cdots \cup \pi^{(k)} \subseteq E_{\mathrm{large}}$, $|\pi^{(1)} \cup \cdots \cup \pi^{(k)}| \le \lfloor \frac{k}{\varepsilon} \rfloor$, および $\sum_{e\in\pi^{(i)}} p_e \le L$ を満たす.
for all $\pi \in \Pi$ **do**
  $G' \leftarrow G$ において枝集合 $E_{\mathrm{large}} \setminus \pi$ を削除し，π に含まれる枝すべてを縮約したもの
  $L' \leftarrow kL - \sum_{i=1}^{k} \sum_{e\in\pi^{(i)}} p_e$
  $z^* \leftarrow G'$ にて納期を L' にしたラグランジュ緩和問題の最適ラグランジュ乗数
  $T' \leftarrow$ コスト $c^*_e = w_e + z^* p_e$ における最小全域木の中で定理 1 の条件を満たすもの
  全域木 $T' \cup \pi^{(1)} \cup \cdots \cup \pi^{(k)}$ を保存
end for
保存された全域木の中で最小重みのものを $T' \cup \pi^{(1)} \cup \cdots \cup \pi^{(k)}$ とする
各 $i = 1, 2, \dots, k$ に対し，枝集合 $\pi^{(i)}$ をマシン i に割り当てる
T' に含まれる枝をマシン 1 から k まで順番に割り当てる．ただし，ある枝をマシン i に割り当てたときに納期 L を超えたら，次の枝からマシン $i+1$ へ割り当てる．
以上より作成したスケジュールを出力

参考文献

[1] V. Aggarwal, Y. P. Aneja, K. P. K. Nair, “Minimal spanning tree subject to a side constraint,” *Comput. Oper. Res.*, **9** (1982), 287–296.

[2] S. G. Nurre, T. C. Sharkey, “Integrated network design and scheduling problems with parallel identical machines: complexity results and dispatching rules,” *Networks*, **63** (2014), 306–326.

[3] R. Ravi, M. X. Goemans, “The constrained minimum spanning tree problem,” *Proc. SWAT 1996*, LNCS 1097, 66–75.