日本オペレーションズ・リサーチ学会
2022年 春季研究発表会

多目的最適化問題に対する加速付き近接勾配法における
ステップ幅の一般化と点列の収束性について

05001149 京都大学 *田辺広樹 TANABE Hiroki
05000235 京都大学 福田エレン秀美 FUKUDA Ellen Hidemi
01704632 京都大学 山下信雄 YAMASHITA Nobuo

1. はじめに

最小化（または最大化）すべき目的関数が複数あるような最適化問題のことを**多目的最適化問題**といい，ベクトル値関数 $F\colon \mathbf{R}^n \to (\mathbf{R}\cup\{\infty\})^m$ を用いて以下のように表される．

$$\min_{x\in\mathbf{R}^n} \quad F(x) \tag{1}$$

一般に，多目的最適化問題において，すべての目的関数を同時に最小化するような点が存在するとは限らないため，**パレート最適性**という概念が用いられる．パレート解とは，ある目的関数を改善しようとすると，他の目的関数のうち少なくとも一つが改悪されてしまうような解のことをいう．

多目的最適化問題 (1) に対する主要解法として，パラメータを用いて変換された単一目的最適化問題を解くことで元の問題の解を得る**スカラー化法**があるが，パラメータの値を適切に定めるのが難しいという問題点がある．一方，近年では，単一目的関数の問題に対する最適化手法を拡張した**降下法**が注目を集めている．例えば，**最急降下法** [4] は，微分可能な多目的最適化問題に対する解法として知られている．

以下では，(1) の目的関数 F の各成分 F_i が，連続的微分可能な凸関数 $f_i\colon \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ と閉真凸関数 $g_i\colon \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}\cup\{\infty\}$ によって，

$$F_i(x) \coloneqq f_i(x) + g_i(x), \quad i = 1,\dots,m \tag{2}$$

と表されている場合を考える．このような場合，**近接勾配法** [6] 及び**加速付き近接勾配法** [9] が有効な手法として知られている．近接勾配法及び加速付き近接勾配法を用いたとき，暫定解とパレート解の距離を見積もる**メリット関数** [7] と呼ばれる関数の値がそれぞれ $O(1/k)$ 及び $O(1/k^2)$ の速さでゼロに収束することが示されている [8, 9]．しかし，生成される点列自体の収束性については，近接勾配法については [2] で解析が行われているものの，加速付き近接勾配法については未だ解析されていない．

本発表では，多目的最適化問題に対する加速付き近接勾配法のアルゴリズムに用いるステップサイズを一般化することで，メリット関数の $O(1/k^2)$ の収束性を保ったまま，点列自体の収束性を示す．この一般化は，単一目的最適化問題に対する近接勾配法 [5] の加速化手法である FISTA (Fast Iterative Shrinkage-Thresholding Algorithm) [1] の収束性の解析を行った文献 [3] を参考にしたものである．

2. 準備

本節では，本発表で用いる記号や用語を定義する．まず，ベクトル $u, v \in \mathbf{R}^m$ に対して，$u_i \le (<) v_i\,(i = 1,\dots,m)$ となるとき，$u \le (<) v$ と表す．また，F の $\alpha \in \mathbf{R}^m$ に対する**レベル集合**を，以下のように定義する．

$$\mathcal{L}_F(\alpha) \coloneqq \{x \in \mathbf{R}^n \mid F(x) \le \alpha\} \tag{3}$$

さらに，集合 $A \subseteq \mathbf{R}^n$ に対する関数 F の像を $F(A) \coloneqq \{F(x) \in \mathbf{R}^m \mid x \in A\}$ とし，集合 $B \subseteq \mathbf{R}^m$ に対する関数 F の逆像を $F^{-1}(B) \coloneqq \{x \in \mathbf{R}^n \mid F(x) \in B\}$ とする．

次に，パレート最適性の概念を導入する．$F(x) < F(x^*)$ なる $x \in \mathbf{R}^n$ が存在しないような $x^* \in \mathbf{R}^n$ を，(1) の**弱パレート最適解**という．

最後に，(1) に対する**メリット関数** $u_0\colon \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}\cup\{\infty\}$ を，以下のように定義する．

$$u_0(x) = \sup_{y\in\mathbf{R}^n} \min_{i\in\{1,\dots,m\}} \{F_i(x) - F_i(y)\}$$

u_0 は x が弱パレート最適解のときはゼロを，そうでないときにはゼロより大きい値を取る [7]．特に，$m = 1$ かつ (1) に最適値 F^* が存在するとき，$u_0(x) = F(x) - F^*$ である．

3. 多目的最適化問題に対する加速付き近接勾配法

式 (2) における f_i の勾配 ∇f_i は L_i-リプシッツ連続であるとし，$L \coloneqq \max_{i=1,\dots,m} L_i$ とおく．また，以下の仮定をおく．

仮定 1. 問題 (1) の弱パレート最適解の集合を $X^* \subseteq \mathbf{R}^n$ とし，$\mathcal{L}_F$ を (3) によって定める．このとき，任意の $x \in \mathcal{L}_F(F(x^0))$ に対して $F(x^*) \le F(x)$ なる $x^* \in X^*$ が存在し，

$$R \coloneqq \sup_{F^*\in F(X^*\cap\mathcal{L}_F(F(x^0)))} \min_{x\in F^{-1}(\{F^*\})} \left\|x - x^0\right\|^2 < \infty$$

$m = 1$ のときは $X^* \subseteq \mathcal{L}_F(F(x^0))$ であることから，単一目的最

適化の場合，問題に最適解が存在すれば仮定 1 は成立する．

このとき，問題 (1) に対する**加速付き近接勾配法** [9] は，次のように表される．

アルゴリズム 1. $x^0 \in \mathrm{dom}\, F, y^1 := x^0, t_1 := 1, \ell \geq L$ とし，$k \geq 1$ について，以下の更新を繰り返す．

(i) $x^k := \operatorname*{argmin}_{x \in \mathbf{R}^n} \max_{i=1,\ldots,m} \left\{ \nabla f_i(y^k)^\top (x - y^k) + g_i(x) + f_i(y^k) - F_i(x^{k-1}) + \frac{\ell}{2} \|x - y^k\|^2 \right\}$

(ii) $t_{k+1} := 1/2 + \sqrt{t_k^2 + 1/4}$

(iii) $\gamma_k := (t_k - 1)/t_{k+1},\ y^{k+1} := x^k + \gamma_k \left(x^k - x^{k-1} \right)$

$m = 1$ のとき，アルゴリズム 1 は単一目的最適化問題に対する FISTA [1] と一致する．また，ステップ (ii) を $t_{k+1} := 1$ に変更すれば，アルゴリズム 1 は多目的最適化問題に対する近接勾配法 [6] を表す．仮定 1 のもとで，アルゴリズム 1 によって生成された $\left\{x^k\right\}$ に対し，メリット関数の列 $\left\{u_0(x^k)\right\}$ は $O(1/k^2)$ の速さでゼロに収束することが示されている [9] が，$\left\{x^k\right\}$ 自体の収束性に対しては，まだ解析が行われていない．

4. ステップ幅の一般化と収束性解析

定数 $a \in [0, 1), b \in [a^2/4, 1/4]$ を用いて，アルゴリズム 1 のステップ (ii) を以下のように書き換えることを考える．

$$t_{k+1} := 1/2 + \sqrt{t_k^2 - a t_k + b} \tag{4}$$

$a = 0, b = 1/4$ のとき，(4) はもとのステップサイズの選び方と一致する．また，$b = a^2/4$ のとき，$\{t_k\}$ は一般項 $t_k = (1 - a)k/2 + (1 + a)/2$ を持ち，これは文献 [3] で用いられているステップサイズに対応している．つまり，(4) は，これら 2 種のよく知られたステップサイズをともに表すことのできる，より一般的なステップサイズの定義を提供している．よって，最適化を行う際，パラメータを連続的に変化させることで，アルゴリズムをより細かく調整することが可能となる．

アルゴリズム 1 のステップサイズの更新式として (ii) の代わりに (4) を用いたものを，**アルゴリズム** *2* とする．以下の定理が示すように，アルゴリズム 2 でも，メリット関数列 $\left\{u_0(x^k)\right\}$ の $O(1/k^2)$ の収束率はアルゴリズム 1 と同様に保証される．

定理 1. 与えられた $a \in [0, 1), b \in [a^2/4, 1/4]$ に対し，アルゴリズム *2* が生成する点列を $\left\{x^k\right\}$ とする．このとき，仮定 *1* のもとで，任意の $k \geq 1$ について次式が成り立つ．

$$u_0(x^k) \leq \frac{2\ell R}{(1 - a)k^2 + (4 - 2a + (1 - 4b)/(1 - a))k + 4}$$

さらに，(4) において $a > 0$ とすれば，点列 $\left\{x^k\right\}$ 自体の収束性を示すことができる．

定理 2. 与えられた $a \in (0, 1), b \in [a^2/4, 1/4]$ に対し，アルゴリズム *2* が生成する点列を $\left\{x^k\right\}$ とする．このとき，仮定 *1* のもとで，$\left\{x^k\right\}$ は (1) の弱パレート最適解に収束する．

参考文献

[1] Beck, A. and Teboulle, M.: A fast iterative shrinkage-thresholding algorithm for linear inverse problems, *SIAM Journal on Imaging Sciences*, Vol. 2 (2009), 183–202.

[2] Bello-Cruz, Y., Melo, J. G. and Serra, R. V.: A proximal gradient splitting method for solving convex vector optimization problems, *Optimization*, (2020).

[3] Chambolle, A. and Dossal, C.: On the Convergence of the Iterates of the“Fast Iterative Shrinkage/Thresholding Algorithm”, *Journal of Optimization Theory and Applications*, Vol. 166 (2015), 968–982.

[4] Fliege, J. and Svaiter, B. F.: Steepest descent methods for multicriteria optimization, *Mathematical Methods of Operations Research*, Vol. 51 (2000), 479–494.

[5] Fukushima, M. and Mine, H.: A generalized proximal point algorithm for certain non-convex minimization problems, *International Journal of Systems Science*, Vol. 12 (1981), 989–1000.

[6] Tanabe, H., Fukuda, E. H. and Yamashita, N.: Proximal gradient methods for multiobjective optimization and their applications, *Computational Optimization and Applications*, Vol. 72 (2019), 339–361.

[7] Tanabe, H., Fukuda, E. H. and Yamashita, N.: New merit functions and error bounds for non-convex multiobjective optimization, arXiv: 2010.09333, 2020.

[8] Tanabe, H., Fukuda, E. H. and Yamashita, N.: Convergence rates analysis of a multiobjective proximal gradient methods, arXiv: 2010.08217, 2021.

[9] 田辺広樹, 福田エレン秀美, 山下信雄：多目的最適化問題に対する加速付き近接勾配法, 日本オペレーションズ・リサーチ学会春季研究発表会アブストラクト集, 2021.