日本オペレーションズ・リサーチ学会
2022年 春季研究発表会

基数制約つき分布ロバストポートフォリオ最適化

05000410　富士通株式会社/東京工業大学　*小林 健　KOBAYASHI Ken
01309510　筑波大学　高野 祐一　TAKANO Yuichi
01405430　東京工業大学　中田 和秀　NAKATA Kazuhide

1.　はじめに

本発表では投資対象資産の収益率が従う確率分布の不確実性集合を考慮した分布ロバストポートフォリオ最適化問題 [2] に注目し，この問題に投資資産数の上限制約 (基数制約) を課した問題の厳密解法を与える．Delage and Ye が提案した分布ロバストポートフォリオ最適化問題 [2] は半正定値最適化問題に帰着される問題であり，この問題に基数制約を課した問題は混合整数半正定値最適化問題として定式化される．しかし混合整数半正定値最適化問題に対する解法の研究は未成熟な段階にあり，既存の汎用ソルバーを用いても候補資産数が多い問題では求解が困難となる．

近年，基数制約つき平均-分散モデルに対する高速解法として切除平面法による解法が提案された [1]．本発表ではこの解法を拡張し，基数制約つき分布ロバストポートフォリオ最適化問題に対する切除平面法を提案する．ここで提案手法は劣勾配を計算するため各反復で半正定値最適化問題を解く必要がある．本発表では，問題の構造を活用した半正定値行列補完により各反復で解く半正定値最適化問題の規模を縮小し，劣勾配の算出に必要な計算量を削減できることを示す．

本稿では N 次実ベクトル全体の集合を $\mathbb{R}^N$ と表す．実対称行列 $\boldsymbol{M}$ が半正定値行列であるとき $\boldsymbol{M} \succeq \boldsymbol{O}$ と表し，$\boldsymbol{M}$ が正定値行列であるとき $\boldsymbol{M} \succ \boldsymbol{O}$ と表す．二つのベクトル $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in \mathbb{R}^N$ の Hadamard 積 (成分ごとの積) を $\boldsymbol{v} \circ \boldsymbol{w} \in \mathbb{R}^N$ と表す.

2.　ポートフォリオ最適化問題の定式化

候補資産全体の集合を $[N] := \{1, 2, \ldots, N\}$ とし，各資産に対する投資比率をまとめたベクトルを $\boldsymbol{x} := (x_1, x_2, \ldots, x_N)^\top \in \mathbb{R}^N$ と表す．本発表ではポートフォリオ $\boldsymbol{x}$ に対する実行可能領域を以下のように定義する:

$$\mathcal{X} := \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^N \mid \boldsymbol{1}^\top \boldsymbol{x} = 1,\ \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}\}.$$

ここで $\boldsymbol{1}$ は各成分が 1 のベクトルとする．$\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}$ は空売りを禁止する制約を表す．またポートフォリオ $\boldsymbol{x}$ には基数制約

$$\|\boldsymbol{x}\|_0 \leq k \tag{1}$$

を課す．ここで $\|\cdot\|_0$ は ℓ_0 ノルム (非ゼロ成分数) を表し，k を投資資産数の上限を表す定数とする.

可測空間 $(\Omega, \mathcal{F})$ において，$\tilde{\boldsymbol{\xi}} : \Omega \to \mathbb{R}^N$ を各資産の収益率を表す確率変数とする．観測データから推定した収益率の平均ベクトル, 共分散行列をそれぞれ $\hat{\boldsymbol{\mu}} \in \mathbb{R}^N$, $\hat{\boldsymbol{\Sigma}} \succ \boldsymbol{O}$ とする．$\mathcal{M}$ を可測空間 $(\Omega, \mathcal{F})$ 上の確率測度全体の集合とし，確率測度 $F \in \mathcal{M}$ のもとでの期待値を $\mathbb{E}_F[\,\cdot\,]$ と表す.

Delage and Ye [2] は, モーメントに基づく確率測度の不確実性集合を以下のように定義した:

$$\mathcal{D} := \left\{ F \in \mathcal{M} \;\middle|\; \begin{array}{l} \left(\mathbb{E}_F[\tilde{\boldsymbol{\xi}}] - \hat{\boldsymbol{\mu}}\right)^\top \hat{\boldsymbol{\Sigma}}^{-1} \left(\mathbb{E}_F[\tilde{\boldsymbol{\xi}}] - \hat{\boldsymbol{\mu}}\right) \leq \kappa_1 \\ \mathbb{E}_F[(\tilde{\boldsymbol{\xi}} - \hat{\boldsymbol{\mu}})(\tilde{\boldsymbol{\xi}} - \hat{\boldsymbol{\mu}})^\top] \preceq \kappa_2 \hat{\boldsymbol{\Sigma}} \end{array} \right\}.$$

ここで $\kappa_1 \geq 0$, $\kappa_2 > 1$ は不確実性集合の大きさを規定する定数である.

確率変数 $\tilde{\boldsymbol{\xi}}$ の実現値 $\boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^N$ に対して, ポートフォリオ $\boldsymbol{x}$ の効用関数を収益率 $\boldsymbol{\xi}^\top \boldsymbol{x}$ に関する単調非減少な区分線形凹関数として $\min_{\ell \in [L]} \left\{a^{(\ell)} \boldsymbol{\xi}^\top \boldsymbol{x} + b^{(\ell)}\right\}$ と定義する．ここで L は線形関数の総数，$a^{(\ell)}$, $b^{(\ell)} \in \mathbb{R}$ はそれぞれ ℓ 番目の線形関数の傾き, 切片を表す定数である．またポートフォリオの損失関数を効用関数の -1 倍，すなわち

$$\mathcal{L}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\xi}) := \max_{\ell \in [L]} \left\{-a^{(\ell)} \boldsymbol{\xi}^\top \boldsymbol{x} - b^{(\ell)}\right\}$$

と定義する.

本発表では，不確実性集合 $\mathcal{D}$ のもとで起こる最悪の期待損失を最小化する問題を解く:

$$\min_{\boldsymbol{x},\, \boldsymbol{z}} \quad \frac{1}{2\gamma} \boldsymbol{x}^\top \boldsymbol{x} + \max_{F \in \mathcal{D}} \left\{\mathbb{E}_F \left[\mathcal{L}(\boldsymbol{x}, \tilde{\boldsymbol{\xi}})\right]\right\} \tag{2a}$$

$$\text{s.t.} \quad z_n = 0 \ \Rightarrow\ x_n = 0 \quad (\forall n \in [N]), \tag{2b}$$

$$\boldsymbol{x} \in \mathcal{X}, \quad \boldsymbol{z} \in \mathcal{Z}_N^k. \tag{2c}$$

ここで目的関数 (2a) の第一項は $\boldsymbol{x}$ に関する正則化項であり，$\gamma > 0$ は正則化の強さを調整する定数である．$\boldsymbol{z} \in \{0, 1\}^N$ は各資産に投資しない／するを表す変数で，$\mathcal{Z}_N^k := \{\boldsymbol{z} \in \{0, 1\}^N \mid \boldsymbol{1}^\top \boldsymbol{z} = k\}$ とする．制約 (2b), (2c) によって $\boldsymbol{x}$ の基数制約 (1) が表現されている.

問題 (2) は目的関数 (2a) に確率測度 F に関する最大化問題を含む．ここで Delage and Ye [2] の結果を用

いると問題 (2) は整数制約と半正定値制約のもと凸 2 次関数を最小化する混合整数半正定値最適化問題として等価に書き直すことができる．定式化の詳細については Kobayashi *et al.* [3] を参照されたい．

3.　2 段階最適化問題としての再定式化

本発表では問題 (2) を 0-1 変数と連続変数を分離した 2 段階最適化問題として再定式化する．まず $\boldsymbol{z} \in \{0,1\}^N$ に対して，$f(\boldsymbol{z})$ を問題 (2) において $\boldsymbol{z}$ を固定した問題の最適値とする．最適値関数 $f(\boldsymbol{z})$ を用いると，問題 (2) は以下の問題に書き換えられる:

$$\min_{\boldsymbol{z}} \ f(\boldsymbol{z}) \quad \text{s.t.} \ \boldsymbol{z} \in \mathcal{Z}_N^k. \tag{3}$$

以降では $f(\boldsymbol{z})$ を最小化する問題 (3) を上位問題，$f(\boldsymbol{z})$ を求める問題を下位問題とよぶ．下位問題は半正定値最適化問題であり，その双対問題を導出すると強双対性から $f(\boldsymbol{z})$ が以下の問題の最適値と一致することが示せる:

$$\max_{\substack{\boldsymbol{\omega},\ \boldsymbol{B}^{(\ell)},\ \boldsymbol{\beta}^{(\ell)},\\ \boldsymbol{\eta},\ \boldsymbol{\lambda},\ \pi}} \ -\frac{\gamma}{2}\boldsymbol{z}^\top(\boldsymbol{\omega}\circ\boldsymbol{\omega}) - \sum_{\ell\in[L]} \eta^{(\ell)} b^{(\ell)} + \pi \tag{4a}$$

$$\text{s.t.} \quad \boldsymbol{\omega} \geq \sum_{\ell\in[L]} a^{(\ell)}\boldsymbol{\beta}^{(\ell)} + \pi\mathbf{1}, \tag{4b}$$

$$\sum_{\ell\in[L]} \boldsymbol{B}^{(\ell)} = \kappa_2\hat{\boldsymbol{\Sigma}} - \hat{\boldsymbol{\mu}}\hat{\boldsymbol{\mu}}^\top + \hat{\boldsymbol{\mu}}\left(\sum_{\ell\in[L]}\boldsymbol{\beta}^{(\ell)}\right)^\top + \left(\sum_{\ell\in[L]}\boldsymbol{\beta}^{(\ell)}\right)\hat{\boldsymbol{\mu}}^\top, \tag{4c}$$

$$\sum_{\ell\in[L]} \boldsymbol{\beta}^{(\ell)} = \boldsymbol{\lambda} + \hat{\boldsymbol{\mu}}, \tag{4d}$$

$$1 - \sum_{\ell\in[L]} \eta^{(\ell)} = 0, \tag{4e}$$

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{B}^{(\ell)} & \boldsymbol{\beta}^{(\ell)} \\ (\boldsymbol{\beta}^{(\ell)})^\top & \eta^{(\ell)} \end{pmatrix} \succeq \boldsymbol{O} \quad (\forall \ell \in [L]), \tag{4f}$$

$$\begin{pmatrix} \hat{\boldsymbol{\Sigma}} & \boldsymbol{\lambda} \\ \boldsymbol{\lambda}^\top & \kappa_1 \end{pmatrix} \succeq \boldsymbol{O}. \tag{4g}$$

この結果から，$f(\boldsymbol{z})$ は $\boldsymbol{z} \in [0,1]^N$ 上で凸関数であること，$f(\boldsymbol{z})$ の劣勾配 $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{z}) \in \partial f(\boldsymbol{z})$ が双対問題 (4) の最適解から算出できることが導ける．

4.　切除平面法

前節で述べた性質を用いて上位問題 (3) を解く切除平面法を設計する．切除平面法では $f(\boldsymbol{z})$ を区分線形関数で下側近似した緩和問題を繰り返し解いて最適解を探索する．まず θ_{LB} を問題 (2) の最適値の下界として，初期実行可能領域を以下のように定義する:

$$\mathcal{F}_1 := \{(\boldsymbol{z},\theta) \in \mathcal{Z}_N^k \times \mathbb{R} \mid \theta \geq \theta_{\mathrm{LB}}\}.$$

ここで θ は最適値の下界を表す補助変数である．切除平面法は t 反復目 $(t \geq 1)$ で以下の緩和問題を解き，緩和解 $(\boldsymbol{z}_t, \theta_t)$ を得る:

$$\min \ \theta \quad \text{s.t.} \quad (\boldsymbol{z},\theta) \in \mathcal{F}_t.$$

ここで $\mathcal{F}_t$ は t 反復目における実行可能領域である．次に $\boldsymbol{z} \leftarrow \boldsymbol{z}_t$ として下位問題 (4) を解き，最適値 $f(\boldsymbol{z}_t)$ と劣勾配 $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{z}_t) \in \partial f(\boldsymbol{z}_t)$ を求める．そして

$$\mathcal{F}_{t+1} \leftarrow \mathcal{F}_t \cap \{(\boldsymbol{z},\theta) \mid \theta \geq f(\boldsymbol{z}_t) + \boldsymbol{g}(\boldsymbol{z}_t)^\top(\boldsymbol{z}-\boldsymbol{z}_t)\}$$

と実行可能領域を更新する．切除平面法では以上の手続きを最適値の上界と下界が十分近づくまで繰り返す．

5.　行列補完を用いた切除平面法の効率化

切除平面法では劣勾配を算出するため各反復で下位問題 (4) を解く．ここで下位問題 (4) は半正定値最適化問題であり，候補資産数 N が多い場合は問題が大規模化し劣勾配の算出に必要な計算量が増大する．この課題を解決するため，本発表では下位問題 (4) の構造を活用した半正定値行列補完により解くべき問題の規模を縮小できることを示す．縮小後の問題の規模は投資資産数の上限 k のみに依存するため，候補資産数 N が多い問題でも劣勾配の算出が効率的に行えるようになり，切除平面法全体の計算を高速化できる．

6.　数値実験

提案手法の有効性を検証するため，公開されているデータセットを用いてアルゴリズムの性能とポートフォリオの運用成績について評価する数値実験を行った．実験結果の詳細は当日報告する．

参考文献

[1] Dimitris Bertsimas and Ryan Cory-Wright. A scalable algorithm for sparse portfolio selection. *arXiv preprint arXiv:1811.00138*, 2018.

[2] Erick Delage and Yinyu Ye. Distributionally robust optimization under moment uncertainty with application to data-driven problems. *Operations Research*, 58(3):595–612, 2010.

[3] Ken Kobayashi, Yuichi Takano, and Kazuhide Nakata. Cardinality-constrained distributionally robust portfolio optimization. *arXiv preprint arXiv:2112.12454*, 2021.