集合最適化問題における非線形スカラー化手法とその応用

05000720　秋田県立大学　*荒谷洋輔　ARAYA Yousuke

1.　はじめに

多目的最適化問題の拡張である集合最適化問題は、1997 年に黒岩-田中-Ha[5] によって提唱された。この問題は、集合値写像の像空間の元（集合）における大小の比較について６種類の順序を導入し、その順序による最適化問題を考えるというものである。近年では、**集合最適化問題が「多目的のロバスト最適化問題」に変換できることの発見 [4] などの重要な成果がある。**

発表者は、ベクトルの非線形スカラー化手法 [3] の自然な拡張である、集合の非線形スカラー化手法の研究 [1, 2] を 2010 年代に進めてきた。本発表ではその成果の概要と応用について紹介する。

2.　準備

本発表では、Y をノルム空間、$\mathbf{0}_Y$ を Y の原点とする。集合 $A \subset Y$ に対し、A の位相的内部、位相的閉包をそれぞれ $\mathrm{int}A$、$\mathrm{cl}A$ と表す。また、この論文で、$C \subset Y$ は閉凸錐を表すものとする。錐 $C \subset Y$ が solid とは $\mathrm{int}C \neq \emptyset$ を満たすことであり、pointed であるとは $C \cap (-C) = \{\mathbf{0}_Y\}$ が成立する場合である。

凸錐 $C \subset Y$ によってベクトル順序 $\leq_C$ が導入され、$(Y, \leq_C)$ は順序ベクトル空間となる。

$$\forall y_1, y_2 \in Y, \qquad y_1 \leq_C y_2 \overset{def}{\Longleftrightarrow} y_2 - y_1 \in C$$

$\mathcal{V}$ を Y の空でない部分集合全体とする。$\alpha \in \mathbb{R}$、$V_1, V_2, V \in \mathcal{V}$ に対して、２つの集合の和･スカラー積は以下のように定義される。

$$V_1 + V_2 := \{v_1 + v_2 \mid v_1 \in V_1, v_2 \in V_2\}$$

$$\alpha V := \{\alpha v \mid v \in V\}$$

定義 2.1 (集合関係：黒岩-田中-Ha[5])**.** $A,\, B \in \mathcal{V}$ と、solid な閉凸錐 $C \subset Y$ に対して、以下の集合関係を定義する。

$$[\textbf{lower}] \quad A \leq_C^l B \quad \text{by} \quad B \subset A + C$$

$$[\textbf{upper}] \quad A \leq_C^u B \quad \text{by} \quad A \subset B - C$$

$$A \leq_C^{l\&u} B \quad \text{by} \quad B \subset A + C \quad \text{and} \quad A \subset B - C$$

例 1. 集合の特別な場合として、「区間」を考える。

$$Y = \mathbb{R}, \quad C = \mathbb{R}_+ := \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\},$$

$$A = [a_1, a_2], \quad B = [b_1, b_2] \quad (a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{R})$$

このとき、$\leq_C^l$、$\leq_C^u$、$\leq_C^{l\&u}$ について次が分かる。

$$A \leq_C^l B \iff a_1 \leq b_1, \quad A \leq_C^u B \iff a_2 \leq b_2$$

$$A \leq_C^{l\&u} B \iff a_1 \leq b_1 \quad \text{and} \quad a_2 \leq b_2$$

命題 2.2 ([1])**.** $A, B, D \in \mathcal{V}$、$\alpha \geq 0$ に対して、次が成り立つ。

(i) $A \leq_C^{l\&u} B \implies A \leq_C^l B$、
(ii) $A \leq_C^{l\&u} B \implies A \leq_C^u B$、
(iii) $A \leq_C^l B$ と $A \leq_C^u B$ は比較できない、
(iv) $A \leq_C^{l[u]} B \implies A + D \leq_C^{l[u]} B + D$、
(v) $A \leq_C^{l[u]} B \implies \alpha A \leq_C^{l[u]} \alpha B$、
(vi) $\leq_C^l$ と $\leq_C^u$ は、反射律と推移律が成り立つ。

定義 2.3 (C-proper)**.** $A \in \mathcal{V}$ が C-proper $[(-C)$-proper$]$ であるとは、$A + C \neq Y[A - C \neq Y]$ が成り立つときである。また、$\mathcal{V}_C[\mathcal{V}_{-C}]$ を Y の C-proper $[(-C)$-proper$]$ である部分集合の族とする。

定義 2.4 (C-closed：Luc[6])**.** $A \in \mathcal{V}$ が C-closed $[(-C)$-closed$]$ であるとは、$A + C$ $[A - C]$ が閉集合であることと定義する。

注意 1. ベクトル順序 $\leq_C$ と $\leq_{\mathrm{int}C}$ は明らかに異なる。しかし、集合関係では $\leq_C^l$ と $\leq_{\mathrm{int}C}^l$ が同値になることもある ([1] 参照)。

3.　集合の非線形スカラー化手法

3.1.　ベクトルのスカラー化関数

この節では $k^0 \in \mathrm{int}C$ とする。Gerstewitz は、1983 年にベクトル最適化問題において以下のような非線形スカラー化関数を提案した。$\varphi_{C,k^0} : Y \to (-\infty, \infty]$

$$\varphi_{C,k^0}(y) = \inf\{t \in \mathbb{R} \,|\, y \leq_C tk^0\}$$

$$= \inf\{t \in \mathbb{R} \,|\, y \in tk^0 - C\}$$

[3] では、Gerstewitz の関数の重要な性質（順序保存性・劣線形性など）が詳細に調べられている。また、上記の関数は、以下の双対形に変形できる。$\psi_{C,k^0}: Y \to [-\infty, \infty)$

$$\begin{aligned}\psi_{C,k^0}(y) &= \sup\{t \in \mathbb{R} \,|\, tk^0 \leq_C y\} \\ &= \sup\{t \in \mathbb{R} \,|\, y \in tk^0 + C\}\end{aligned}$$

上記の関数は次の性質を持つ。

$$\varphi_{C,k^0}(y) = -\psi_{C,k^0}(-y)$$

これらの関数は、Pareto 最適解（多目的のある種の最小解）の特徴づけなど、多目的最適化問題において幅広い応用を持つ ([3, 6] 参照)。

3.2. 集合のスカラー化関数

集合の非線形スカラー化関数についての研究（$\varphi_{C,k^0}, \psi_{C,k^0}$ の拡張）は 2000 年代初頭の田中-Georgiev から始まり、2000 年代後半に重要な研究があった。発表者は、2010 年代に以下の関数の詳細な性質を調べる研究を始めた。$\inf \emptyset = \infty$ と $\sup \emptyset = -\infty$ を認めることにより、

$$h^l_{\inf}, h^u_{\inf}, h^l_{\sup}, h^u_{\sup}: \mathcal{V} \times \mathcal{V} \to [-\infty, \infty]$$

を次で定義する。$h^l_{\inf}, h^u_{\inf}, h^l_{\sup}, h^u_{\sup}$ は、経済学における効用関数の役割を果たしている。

$$\begin{aligned}h^l_{\inf}(V_1, V_2) &= \inf\{t \in \mathbb{R} \,|\, V_1 \leq^l_C tk^0 + V_2\} \\ h^u_{\inf}(V_1, V_2) &= \inf\{t \in \mathbb{R} \,|\, V_1 \leq^u_C tk^0 + V_2\} \\ h^l_{\sup}(V_1, V_2) &= \sup\{t \in \mathbb{R} \,|\, tk^0 + V_2 \leq^l_C V_1\} \\ h^u_{\sup}(V_1, V_2) &= \sup\{t \in \mathbb{R} \,|\, tk^0 + V_2 \leq^u_C V_1\}\end{aligned}$$

集合のスカラー化関数は、ベクトルのスカラー化関数で成り立っていた重要な性質（順序保存性・劣線形性など）は同様に成り立つ。しかし、狭義単調性・関数の有界性などは集合に適切な条件を付け加えないと成立しない。また、集合のスカラー化関数の場合、1 変数と 2 変数で違いが至る所で見られる（詳細は [1, 2] 参照)。

命題 3.1 ([1])**.** 上記のスカラー化関数について、次が成り立つ。

$$\begin{aligned}h^l_{\sup}(V_1, V_2) &= -h^u_{\inf}(-V_1, -V_2) \\ h^u_{\sup}(V_1, V_2) &= -h^l_{\inf}(-V_1, -V_2)\end{aligned}$$

4 つの非線形スカラー化関数は、ある種の双対性を持っている。

3.3. 集合関係とスカラーの変換定理

定理 3.2 ([2])**.** $C \subset Y$ を *solid* な閉凸錐として、$k^0 \in \mathrm{int}C$ とする。すると、次が言える。

(i) $V_1 \in \mathcal{V}_C$ が C-*closed*、 $V_2 \in \mathcal{V}$ ならば、

$$V_2 \subset V_1 + C \Longleftrightarrow h^l_{\inf}(V_1, V_2) \leq 0、$$

(ii) $V_1 \in \mathcal{V}$、$V_2 \in \mathcal{V}_{-C}$ が $(-C)$-*closed* ならば、

$$V_1 \subset V_2 - C \Longleftrightarrow h^u_{\inf}(V_1, V_2) \leq 0、$$

(iii) $V_1 \in \mathcal{V}$、$V_2 \in \mathcal{V}_C$ が C-*closed* ならば、

$$V_1 \subset V_2 + C \Longleftrightarrow h^l_{\sup}(V_1, V_2) \leq 0、$$

(iv) $V_1 \in \mathcal{V}_{-C}$ が $(-C)$-*closed* で、$V_2 \in \mathcal{V}$ ならば、

$$V_2 \subset V_1 - C \Longleftrightarrow h^u_{\sup}(V_1, V_2) \leq 0。$$

本発表では、上記の変換定理の応用も紹介する予定である。

参考文献

[1] Y. Araya, *Four types of nonlinear scalarizations and some applications in set optimization*, Nonlinear Anal. 75 (2012) 3821–3835.

[2] Y. Araya, *Existence theorems of cone saddle-points in set optimization applying nonlinear scalarizations*, Linear Nonlinear Anal. 6 (2020) 13–33.

[3] A. Göpfert, H. Riahi, C. Tammer, and C. Zălinescu *Variational methods in partially ordered spaces*, Springer-Verlag, New York (2003).

[4] J. Ide, E. Köbis, D. Kuroiwa, A. Schöbel, C. Tammer, *The relationship between multi-objective robustness concepts and set-valued optimization*, Fixed Point Theory Appl. (2014), 2014:83, 20.

[5] D. Kuroiwa, T. Tanaka, and T.X.D. Ha, *On cone convexity of set-valued maps*, Nonlinear Anal. 30 (1997) 1487–1496.

[6] D. T. Luc, *Theory of vector optimization*, Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems, 319, Springer-Verlag, Berlin (1989).