日本オペレーションズ・リサーチ学会
2022年 春季研究発表会

ロバストトポロジー最適化問題に対する平滑化法

05001441 東京大学 *西岡暁 NISHIOKA Akatsuki
01111470 東京大学 寒野善博 KANNO Yoshihiro

1. はじめに

トポロジー最適化は，構造物の最適な形状を求める数理的な設計手法である．外力の不確実性を考慮したロバストトポロジー最適化問題は，最大固有値の最小化問題として定式化され，非平滑最適化問題となる．本研究では，この問題に対し平滑化法（smoothing method）を用いた解法を提案する．

2. ロバストトポロジー最適化問題

図 1: ロバストトポロジー最適化問題の例（左）とその解（右）

本研究では，図 1 のような外力の方向の不確実性のもとでコンプライアンス（外力による変形の度合い）の最大値を最小化するロバストトポロジー最適化問題を考える．問題は次のように定式化される：

$$\underset{\boldsymbol{x}\in S}{\text{Minimize}} \ \max_{\substack{\boldsymbol{p}\in\mathbb{R}^d \\ \|\boldsymbol{p}\|=1}} \boldsymbol{p}^{\mathrm{T}} C(\boldsymbol{x})\boldsymbol{p}. \tag{1}$$

ただし，$C:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{d\times d}$ は非凸な行列値関数であり，任意の $\boldsymbol{x} \in S \subset \mathbb{R}^n$ に対して $C(\boldsymbol{x})$ は半正定値対称行列である．また，問題 (1) の実行可能領域は，$\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n_{\geq 0}$ および $V_0 \in (0, n)$ に対して

$$S = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \mid \boldsymbol{v}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} = V_0,\ \boldsymbol{0} \leq \boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{1}\} \tag{2}$$

とする．問題 (1) は，Rayleigh–Ritz の定理を用いることで，次のような最大固有値の最小化問題に変形できる：

$$\underset{\boldsymbol{x}\in S}{\text{Minimize}} \ \lambda_{\max}(C(\boldsymbol{x})). \tag{3}$$

ただし，$\lambda_{\max}(C(\boldsymbol{x}))$ は $C(\boldsymbol{x})$ の最大固有値である．問題 (1) は，最大固有値が重複する点において目的関数が微分不可能になるため，非平滑最適化問題である．

Takezawa et al. [1] は，問題 (3) の非平滑性を考慮せず，Method of Moving Asymptotes (MMA) とよばれる構造最適化分野で用いられる最適化法を適用し解いている．最適解において $C(\boldsymbol{x})$ の最大固有値が重複しない場合は，非平滑性を考慮せずに解いた場合でも問題なく解を求められることが数値実験により示されている．しかしながら，最適解において固有値が重複する問題例も見つかっており，そのような問題で平滑な最適化問題に対する手法を適用すると，生成される点列が振動することが知られている [2, 3]．Holmberg et al. [2] は，非平滑性を回避するために，補助変数 $z \in \mathbb{R}$ を用いて問題 (3) を非線形半正定値計画問題

$$\begin{aligned} &\underset{\boldsymbol{x}\in S,\ z\in\mathbb{R}}{\text{Minimize}} && z \\ &\text{subject to} && zI - C(\boldsymbol{x}) \succeq 0. \end{aligned} \tag{4}$$

に変形している．さらに

$$zI - C(\boldsymbol{x}) = LL^{\mathrm{T}} \tag{5}$$

とおき，下三角行列 $L \in \mathbb{R}^{d\times d}$ を変数に加えることで非線形計画に帰着させ，内点法（IPOPT）を適用して解いている．また，Thore [3] は非平滑最適化法であるバンドル法を用いて問題 (3) を解いている．これらの手法はいずれも問題のサイズが大きくなると 1 反復あたりの計算コストが膨大になってしまい実用的ではない．そこで，本研究では，平滑化法を用いた 1 次法によって問題 (3) を解く．

3. 平滑化法

平滑化法（smoothing method）は，非平滑最適化問題を，平滑な近似関数を用いて解く手法である．本研究では，Zhang and Chen [4] および Chen [5] に基づく平滑化法を用いる．

問題 (3) の目的関数 $\lambda_{\max}(C(\boldsymbol{x}))$ の平滑な近似として，

$$\tilde{f}(\boldsymbol{x};\mu) := \mu \ln\left(\sum_{i=1}^{d} \mathrm{e}^{(\lambda_i(C(\boldsymbol{x}))/\mu)}\right) \tag{6}$$

を考える．ただし，$\mu > 0$ は平滑化パラメータ，$\lambda_i(C(\boldsymbol{x}))$ は行列 $C(\boldsymbol{x})$ の i 番目の固有値である．この近似関数は，連続的微分可能であり

$$\lim_{\boldsymbol{y}\to\boldsymbol{x},\ \mu\downarrow 0} \tilde{f}(\boldsymbol{y};\mu) = \lambda_{\max}(C(\boldsymbol{x}) \tag{7}$$

を満たす．このような関数を平滑化関数（smoothing funciton）とよぶ．ただし，平滑化関数 (6) は μ が小さいと指数関数値が非常に大きくなり数値不安定現象を起こすため，実際には式 (6) と等価な

$$\begin{aligned}\tilde{f}(\boldsymbol{x};\mu) &= \lambda_{\max}(C(\boldsymbol{x})) \\ &\quad + \mu \ln\left(\sum_{i=1}^{d} \mathrm{e}^{((\lambda_i(C(\boldsymbol{x}))-\lambda_{\max}(C(\boldsymbol{x})))/\mu)}\right)\end{aligned} \tag{8}$$

を平滑化関数として用いる．本研究では，平滑化関数 (8) を用いた平滑な最適化問題

$$\underset{\boldsymbol{x}\in S}{\mathrm{Minimize}}\ \tilde{f}(\boldsymbol{x};\mu). \tag{9}$$

に対して射影勾配法

$$\boldsymbol{x}^{k+1} = \Pi_S(\boldsymbol{x}^k - \alpha_k \nabla \tilde{f}(\boldsymbol{x}^k;\mu)) \tag{10}$$

を適用する．ただし，$\Pi_S : \mathbb{R}^n \to S$ は実行可能領域 S への射影，$\alpha_k > 0$ は射影勾配法の収束性が保証されるような適切なステップサイズである．実行可能領域 (2) への射影は 2 分法を用いて簡単に求めることができる．そして，適当な定数 $\gamma > 0$ および $\sigma \in (0,1)$ に対して

$$\frac{1}{\alpha_k}\|\boldsymbol{x}^{k+1} - \boldsymbol{x}^k\| < \gamma\mu \tag{11}$$

を満たした場合に

$$\mu \leftarrow \sigma\mu \tag{12}$$

と μ を小さくして再び射影勾配法を適用する．適切なパラメータを選択すれば，この手法で生成された点列の任意の集積点は元の問題 (3) の Clarke 停留点となる．アルゴリズムの詳細は当日発表する．

4.　数値実験

数値実験では，最適解で最大固有値の重複が起こる問題例において，提案手法が生成される点列の振動を抑え，高速に収束することを示す．また，既存手法 [2] と比較して，1 反復あたりの計算コストが小さく，高速であることを示す．

5.　おわりに

本研究ではロバストトポロジー最適化問題に対する平滑化法を用いた解法を提案した．提案手法は 1 次法であるため大規模な問題でも計算コストを抑えることができる．今後の課題として，非凸制約（応力制約など）をもつ問題への平滑化法の拡張などが考えられる．

参考文献

[1] A. Takezawa, S. Nii, M. Kitamura, and N. Kogiso. Topology optimization for worst load conditions based on the eigenvalue analysis of an aggregated linear system. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **200**(25–28):2268–2281, 2011.

[2] E. Holmberg, C-J. Thore, and A. Klarbring. Worst-case topology optimization of self-weight loaded structures using semi-definite programming. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, **52**(5):915–928, 2015.

[3] C-J. Thore. A worst-case approach to topology optimization for maximum stiffness under uncertain boundary displacement. *Computers and Structures*, **259**:106696, 2022.

[4] C. Zhang and X. Chen. Smoothing projected gradient method and its application to stochastic linear complementarity problems. *SIAM Journal on Optimization*, **20**(2):627–649, 2009.

[5] X. Chen. Smoothing methods for nonsmooth, nonconvex minimization. *Mathematical Programming*, **134**(1):71–99, 2012.