二部グラフで表現可能な疎性を持つ二次制約付き二次計画問題と狭小な半正定値計画緩和の条件

05001176 東京工業大学 *東悟大 AZUMA Godai
01507430 東京工業大学 福田光浩 FUKUDA Mituhiro
Ewha Womans University Sunyoung Kim
01704970 東京工業大学 山下真 YAMASHITA Makoto

1. はじめに

次の二次制約付き二次計画問題を扱う．

$$\begin{aligned} \min_{x\in\mathbb{R}^n} \ & x^{\mathrm{T}}Q_0x + 2{q_0}^{\mathrm{T}}x \\ \text{s.t.} \ & x^{\mathrm{T}}Q_px + 2{q_p}^{\mathrm{T}}x \le b_p,\ p=1,\dots,m. \end{aligned} \tag{1}$$

ここで，$n\times n$ 実対称行列の組 $\{Q_p\}_{p=0}^m$，n 次元ベクトルの組 $\{q_p\}_{p=0}^m$，および m 次元ベクトル $b\in\mathbb{R}^m$ は与えられているものとする．多くの NP-hard な問題を表現できる二次制約付き二次計画問題を解くことは難しく，合理的な計算方法の一つは解きやすい問題へ近似することである．次の半正定値計画緩和はそのような近似の一つである．

$$\begin{aligned} \min \ & Q_0\bullet X + 2{q_0}^{\mathrm{T}}x \\ \text{s.t.} \ & Q_p\bullet X + 2{q_p}^{\mathrm{T}}x \le b_p,\ p=1,\dots,m, \\ & X - xx^{\mathrm{T}} \succeq O. \end{aligned} \tag{2}$$

ここで，$M\bullet N := \mathrm{tr}(M^{\mathrm{T}}N)$ はフロベニウス内積，$M\succeq O$ は M が半正定値行列であることを示す．

半正定値計画緩和と (1) の最適値が一致することを緩和が狭小 (tight または exact) であるという．このような状況下では，多項式時間で解ける半正定値計画緩和によって (1) を解くことができるという利点があるため，狭小な半正定値計画緩和ができる (1) の理論的条件の解析が進められている．Burer と Ye [1] は問題中の全ての行列 $Q_0,\dots,Q_m$ が対角行列であるという仮定の下でいくつかの十分条件を示したが，このような仮定を満たす問題は非常に少なく，あまり多くの問題の狭小性を判定できない．Azuma ら [2] は対角行列という仮定を緩め，統合疎パターンという問題の疎性を形式的に表せるグラフ構造が森であっても適用できる条件を提案した．

本研究では更なる一般化として，統合疎パターンを二部グラフで表現可能な (1) に注目し，それらの半正定値計画緩和が狭小であるための条件を提案する．また，既によく知られている非負の非対角成分を持つ (1) の半正定値計画緩和の狭小性を，提案する条件を用いても導けることを示す．

1.1. 線型項に関する仮定

問題 (1) の目的関数と制約には線型項 ${q_p}^{\mathrm{T}}x$ があるが，実際にはこれらを含まない問題を考えるだけで全ての問題を考えたことになる．具体的に，(1) の制約の左辺は

$$x^{\mathrm{T}}Q_0x + 2{q_0}^{\mathrm{T}}x = \begin{bmatrix}1\\x\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix}0 & {q_0}^{\mathrm{T}}\\ q_0 & Q_0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\x\end{bmatrix}$$

と変形できるから，新たな変数 x_0 と制約 $x_0^2=1$ を導入して，線型項を二次項として表現できる．よって，以降の議論では一般性を失わず $q_0=\cdots=q_m=0$ と仮定する．半正定値計画緩和 (2) の双対問題は $S(y) := Q_0 + \sum_{p=1}^m y_pQ_p$ を用いて次のようになる．

$$\begin{aligned} \max \ & -b^{\mathrm{T}}y \\ \text{s.t.} \ & S(y)\succeq O,\ 0\le y\in\mathbb{R}^m. \end{aligned} \tag{3}$$

2. 二部グラフ疎性下での狭小の十分条件

二次制約付き二次計画問題や対応する半正定値計画緩和問題の疎性を表現する手段として，問題中の行列 $Q_0,\dots,Q_m$ が持つ非ゼロ要素の構造から導出できる統合疎パターン

$$\mathcal{E} := \left\{(i,j)\in\mathcal{V}^2 \,\middle|\, [Q_p]_{i,j}\neq 0\ \exists p\in\{0,\dots,m\}\right\}$$

に注目することが多い．ここで，$\mathcal{V}$ は変数の添字集合 $\mathcal{V} := \{1,\dots,n\}$，$[Q_p]_{i,j}$ は行列 Q_p の (i,j) 成分を表す．統合疎パターン $\mathcal{E}$ を辺集合として無向グラフ $(\mathcal{V},\mathcal{E})$ を構成できて，そのグラフ構造は半正定値計画緩和の狭小性と密接に関係する．既

存研究 [2] では，このグラフ $(\mathcal{V},\mathcal{E})$ が閉路を持たない (森である) 場合に，半正定値計画緩和が狭小になるための十分条件を提案している．本研究では，この条件の適用範囲を奇数長の閉路を持たない (二部グラフである) 場合へ拡張する．

半正定値計画緩和の主問題 (2) と双対問題 (3) の強双対定理が重要となるので，上述の仮定と共に以下の仮定をおく [3].

仮定 1. 本節を通して，次の 4 つを仮定する．

- 問題 (1) が許容解を持つ．
- 半正定値計画緩和 (2) の許容集合が有界.
- その双対問題 (3) が許容解を持つ．
- 統合疎パターン $\mathcal{E}$ に対応するグラフ $(\mathcal{V},\mathcal{E})$ が二部グラフである．

本研究では，(3) の行列解 $S(y)$ のランクを評価し，狭小な緩和を持つための次の条件を導いた．

定理 1. 仮定 1 のもとで以下の 2 つが共に成立するならば，半正定値計画緩和 (2) は狭小である．

- 全ての $(k,\ell)\in\mathcal{E}$ に対して，系
$$y\geq 0,\ S(y)\succeq O,\ [S(y)]_{k,\ell}\leq 0$$
が解を持たない．
- 成分全てが 1 のベクトル $\boldsymbol{e}\in\mathbb{R}^n$ を用いた系
$$\begin{cases} y\geq 0,\ S(y)\succeq O,\ S(y)\boldsymbol{e}\leq 0, \\ [S(y)]_{i,j}\geq 0 \quad \forall(i,j)\in\mathcal{E} \end{cases}$$
が解を持たない．

上記の $(|\mathcal{E}|+1)$ 個の系は全て半正定値計画問題であり，狭小な半正定値計画緩和が存在するかを計算機上で容易に判定できる．さらに，この定理から，Sojoudi と Lavaei [4] が示した定理の系の一部が直ちに導かれる．

系 1. 仮定 1 のもとで $Q_0,\ldots,Q_m$ の全ての非対角成分が非負ならば，(2) は狭小である．

3.　非負の非対角成分を持つ問題

次に疎性に関する仮定を与えず，全ての行列 Q_p の非対角成分が非負となるような (1) を考える．このとき，各行列 Q_p は，$n\times n$ 対角行列 D_p と対角成分がゼロであるような $n\times n$ 非負対称行列 R_p によって，$Q_p=2D_p-2R_p$ と表現できる．新たな変数 $z:=-x$ を導入すると，(1) と等価な次の問題が得られる．

$$\begin{aligned} \min_{x,z\in\mathbb{R}^n}\quad & \begin{bmatrix} x\\ z\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix} D_0 & R_0\\ R_0 & D_0\end{bmatrix}\begin{bmatrix} x\\ z\end{bmatrix} \\ \text{s.t.}\quad & \begin{bmatrix} x\\ z\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix} D_p & R_p\\ R_p & D_p\end{bmatrix}\begin{bmatrix} x\\ z\end{bmatrix}\leq b_p,\ p=1,\ldots,m, \\ & \begin{bmatrix} x\\ z\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix} I & I\\ I & I\end{bmatrix}\begin{bmatrix} x\\ z\end{bmatrix}\leq 0. \end{aligned}$$

最後の制約は $\|x+z\|^2=0$ に対応する．

D_p は対角行列なので，変換後の問題の統合疎パターンに対応するグラフは二部グラフになる．R_p の非負性により，全ての行列の非対角成分は非負となる．よって，系 1 により，この問題の半正定値計画緩和は狭小であることが示された．

4.　おわりに

本研究では，特殊な統合疎パターンを持つ二次制約付き二次計画問題に焦点を当て，その半正定値計画緩和の最適値が一致するための十分条件をいくつか示した．また，この十分条件を活用し，全ての非対角成分が非正となる二次制約付き二次計画問題に関する狭小性について，従来と異なる証明を与えた．今後の課題として，二部グラフよりも複雑な統合疎パターンを持つ問題へ拡張を進めることや，現在の仮定 1 を緩めてより一般な問題に対する狭小性の研究が挙げられる．

参考文献

[1] S. Burer and Y. Ye, “Exact semidefinite formulations for a class of (random and nonrandom) nonconvex quadratic programs,” *Math. Program.*, **181**(1), 1–17, 2020.

[2] G. Azuma, M. Fukuda, S. Kim, and M. Yamashita, “Exact SDP relaxations of quadratically constrained quadratic programs with forest structures,” *J Global Optim.*, 2021.

[3] S. Kim and M. Kojima, *Strong duality of a conic optimization problem with a single hyperplane and two cone constraints*, 2021. arXiv: 2111.03251.

[4] S. Sojoudi and J. Lavaei, “Exactness of Semidefinite Relaxations for Nonlinear Optimization Problems with Underlying Graph Structure,” *SIAM J. Optim.*, **24**(4), 1746–1778, 2014.