日本オペレーションズ・リサーチ学会
2022年 春季研究発表会

忍耐時間付きの両側待ち行列の解析

東京工業大学 *阿部寛人 ABE Hiroto
05000656 東京工業大学 矢島萌子 YAJIMA Moeko
01605720 東京工業大学 三好直人 MIYOSHI Naoto

1. はじめに

それぞれが忍耐時間をもつ 2 つの顧客タイプからなる両側待ち行列は, タクシー乗り場に発生する列や移植を待つ患者のリストを管理する問題などに応用される [1, 2, 3]. 先行研究では, 応用先の特徴に応じた仮定を課したモデルが解析されている場合が多い. 本稿では, 2 種類の一般的な忍耐時間付きの両側待ち行列を考え, その 2 つのモデルの関係性を導く.

2. 忍耐時間付きの両側待ち行列

2.1. モデル設定

2 つの顧客タイプが存在する待ち行列モデルを考える. タイプ 1 とタイプ 2 の顧客がシステムに到着し, 2 つのタイプの顧客が, 1 人ずつ揃うとその 2 人はマッチングする. マッチングしたペアは直ちにシステムから退出する. 顧客が到着したときに自分と異なるタイプの顧客がシステムにいない場合は, マッチングするためにシステム内で待機する. 複数の顧客がシステムでマッチングを待っている場合は, 先に到着した顧客が優先的にマッチングする. それぞれの顧客は忍耐時間をもち, 忍耐時間を超えたらマッチングせずにシステムから退出する.

各 $i = 1, 2$ に対して, システムにタイプ $\bar{i} = 3 - i$ の顧客が存在しないとき, タイプ i の顧客は率 λ_i の定常ポアソン過程に従って到着する. 一方で, $\bar{i}$ の顧客が存在するとき, タイプ i の顧客は間隔分布が任意の再生過程に従って到着する. また, その分布に従う確率変数を G_i とし, $\mu_i = 1/E[G_i]$ と記す. タイプ i の顧客は任意の分布に従う忍耐時間にもつ. また, その分布に従う確率変数を H_i とし, $\theta_i = 1/E[H_i]$ と記す.

このモデルを両側 M/G/1+G$^{\mathrm{s}}$ 待ち行列と呼ぶ, また, 列の先頭にいる場合は忍耐時間を超えても退出しないモデルを両側 M/G/1+G$^{\mathrm{w}}$ 待ち行列と呼ぶ.

確率変数 X の分布関数を $F_X(x)$ とし, 補分布関数を $\bar{F}_X(x) = 1 - F_X(x)$ と記す.

3. モデルの解析

両側 M/G/1+G$^{\mathrm{s}}$ 待ち行列の仮待ち時間の確率密度関数は, 到着分布や忍耐時間の分布によって解析が困難である. しかし, 両側 M/G/1+G$^{\mathrm{w}}$ 待ち行列の仮待ち時間の確率密度関数は, 比較的容易に解析ができる. この節では, 両側 M/G/1+G$^{\mathrm{s}}$ 待ち行列と両側 M/G/1+G$^{\mathrm{w}}$ 待ち行列の関係式を導出し, 両側 M/G/1+G$^{\mathrm{s}}$ 待ち行列の議論を両側 M/G/1+G$^{\mathrm{w}}$ 待ち行列の議論に落とす.

3.1. 仮待ち時間

両側 M/G/1+G$^{\mathrm{s}}$ 待ち行列と両側 M/G/1+G$^{\mathrm{w}}$ 待ち行列の仮待ち時間を表す確率変数をそれぞれ V と V^w とする. さらに, V と V^w の確率密度関数をそれぞれ $v(x)$ と $v^w(x)$ とする. $V > 0$ のとき, タイプ 1 の顧客が, システム内に存在し, $V < 0$ のとき, タイプ 2 の顧客が, システム内に存在する. V^w についても同様である. Level crossing theorem を用いることで, 以下の関係式が得られる. $x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ に対して

$$
\begin{aligned}
v(x) &= 1_{\{x>0\}}\phi^1(x) + 1_{\{x<0\}}\phi^2(-x), \\
v^w(x) &= 1_{\{x>0\}}\phi^1_w(x) + 1_{\{x<0\}}\phi^2_w(-x).
\end{aligned}
$$

ここで, $x > 0$ に対して

$$
\begin{aligned}
\phi^i(x) &= \lambda_i \pi_0 \bar{F}_{G_{\bar{i}}}(x)\bar{F}_{H_i}(x) \\
&\quad + \lambda_i \int_{0+}^{x} \bar{F}_{H_i}(x)\bar{F}_{G_{\bar{i}}}(x-y)\phi^i(y)dy, \\
\phi^i_w(x) &= \lambda_1 \pi^w_0 \bar{F}_{G_{\bar{i}}}(x) \\
&\quad + \lambda_1 \int_{0+}^{x} \bar{F}_{H_i}(y)\bar{F}_{G_{\bar{i}}}(x-y)\phi^i_w(y)dy
\end{aligned}
$$

である. また, π_0, π^+, π^-, π_0^+, π_0^- を $\pi_0 = P(V = 0)$, $\pi^+ = P(V > 0)$, $\pi^- = P(V < 0)$, $\pi_0^+ = \pi^+ + \pi_0$, $\pi_0^- = \pi^- + \pi_0$ と定義すると, $\pi_0 + \pi^+ + \pi^- = 1$ が成立する. ここで, π^+ はタイプ 1 の顧客

が, π^- はタイプ 2 の顧客がシステムにいる確率を表している. 上記の π の上に w をつけたものを両側 M/G/1+G$^{\mathrm{w}}$ 待ち行列に関するものとする. 上記の方程式は, 第 2 種ヴォルテラ積分方程式であり, その解は一意に与えられる.

3.2. 系内客数

両側 M/G/1+G$^{\mathrm{s}}$ 待ち行列と両側 M/G/1+G$^{\mathrm{w}}$ 待ち行列について, システム内でマッチングされるのを待つとしたときに, タイプ i の顧客が先頭に並ぶまでの待ち時間をそれぞれ W_i, W_i^w とする. また, 待ち時間 W_i, W_i^w の顧客の滞在時間をそれぞれ D_i, D_i^w とする. また, $[X|A]$ を事象 A を条件付けられた確率変数 X とする.

補題 3.1. 両側 M/G/1+G$^{\mathrm{w}}$ 待ち行列の待ち時間と両側 M/G/1+G$^{\mathrm{s}}$ 待ち行列の仮待ち時間について, 以下の関係が成立する.

$$W_1^w =_{\mathrm{st}} [V|V \geq 0], \quad W_2^w =_{\mathrm{st}} [-V|V \leq 0].$$

証明. 両側 M/G/1+G$^{\mathrm{s}}$ 待ち行列は, $V \geq 0$ で条件付けると, タイプ 1 の顧客が到着する M/G/1+G$^{\mathrm{s}}$ 待ち行列とみなせる. M/G/1+G$^{\mathrm{w}}$ 待ち行列の待ち時間と M/G/1+G$^{\mathrm{s}}$ 待ち行列の仮待ち時間の分布が等しいため [4], 補題の 1 つ目の式が成立する. 同様に $V \leq 0$ で条件付けて考えると, 2 つ目の式が得られる. □

N を系内客数を表す確率変数とする. $N = n$ は $n \geq 0$ のとき, タイプ 1 の顧客がシステムに n 人存在することを表し, $n \leq 0$ とき, タイプ 2 の顧客がシステムに $-n$ 人存在することを表す.

補題 3.1 より, 次の定理が成立する.

定理 3.2. 両側 M/G/1+G$^{\mathrm{s}}$ 待ち行列において, 系内客数の期待値は以下の通りである.

$$E[N] = \left(\Pi^+ - \Pi^- + \Phi_1 - \Phi_2\right)\Pi_0^{-1}.$$

ここで, 上式右辺の記号は次の通りである.

$$\begin{aligned}
&\rho = \lambda_1/\lambda_2,\\
&\Pi^+ = (\rho^{-1} + \mu_2/\lambda_1)\pi^{w,+},\\
&\Pi^- = (\rho + \mu_1/\lambda_2)\pi^{w,-},\\
&\Pi_0 = \rho^{-1}\pi^{w,+} + \rho\pi^{w,-} - \pi_0^w,\\
&\Phi_1 = \mu_1 \int_{0+}^{\infty} \bar{F}_{H_2}(x) F_{V^w}(-x)dx,\\
&\Phi_2 = \mu_2 \int_{0+}^{\infty} \bar{F}_{H_1}(x) \bar{F}_{V^w}(x)dx.
\end{aligned}$$

3.3. 損失確率

$\hat{P}_{\mathrm{loss}}^i$ を両側 M/G/1+G$^{\mathrm{s}}$ 待ち行列のタイプ i の顧客の損失確率とする. また, $\hat{P}_{\mathrm{loss}}^{i,w}$ を両側 M/G/1+G$^{\mathrm{w}}$ 待ち行列のタイプ i の顧客の損失確率とする. $P_{\mathrm{loss}}^{i,w}$ を両側 M/G/1+G$^{\mathrm{w}}$ 待ち行列のタイプ i の顧客がシステムで待つ場合の損失確率とする.

定理 3.3. 両側 M/G/1+G$^{\mathrm{s}}$ 待ち行列の各タイプの顧客の損失確率は以下の通りである.

$$\hat{P}_{\mathrm{loss}}^1 = \frac{\rho^{-1}\pi^{w,+}}{\Pi_0} E[H_1(D_1^w)],$$
$$\hat{P}_{\mathrm{loss}}^2 = \frac{\rho\pi^{w,-}}{\Pi_0} E[H_2(D_2^w)].$$

証明. 補題 3.1 の W_1^w の式と V, G_2, H の独立性より, $D_1^w =_{\mathrm{st}} [V + G_2 | V \geq 0]$ が得られるので

$$\hat{P}_{\mathrm{loss}}^1 = P(V + G_2 \geq H_1, V \geq 0) = \pi_0^+ E[H_1(D_1^w)]$$

を得る. さらに, $\pi_0^+ = (\pi_0^{w,+} - \hat{P}_{\mathrm{loss}}^{1,w})/(1 - \hat{P}_{\mathrm{loss}}^{1,w} - \hat{P}_{\mathrm{loss}}^{2,w})$ が成立する. 上式に代入すると

$$\hat{P}_{\mathrm{loss}}^1 = \frac{\pi_0^{w,+} - \hat{P}_{\mathrm{loss}}^{1,w}}{1 - \hat{P}_{\mathrm{loss}}^{1,w} - \hat{P}_{\mathrm{loss}}^{2,w}} E[H_1(D_1^w)]. \quad (1)$$

ここで, リトルの公式より $\rho(1 - P_{\mathrm{loss}}^{1,w}) = 1 - \pi_0^w/\pi_0^{w,+}$ と $\rho(1 - P_{\mathrm{loss}}^{2,w}) = 1 - \pi_0^w/\pi_0^{w,-}$ を得る. また, $\hat{P}_{\mathrm{loss}}^{1,w} = \pi_0^{w,+} P_{\mathrm{loss}}^{1,w}$ と $\hat{P}_{\mathrm{loss}}^{2,w} = \pi_0^{w,-} P_{\mathrm{loss}}^{2,w}$ も成立する. これらの式を用いて式 (1) を変形すると補題の式の通りに $\hat{P}_{\mathrm{loss}}^{1,w}$ が得られる. 同様に考えると, $\hat{P}_{\mathrm{loss}}^{2,w}$ も導出できる. □

参考文献

[1] Onno J. Boxma, Israel David, David Perry, Wolfgang Stadje, A new look at organ transplantation models and double matching queues, Probability in the Engineering and Informational Sciences, vol.25, no.2, pp.135-155, 2011.

[2] Shaul K. Bar-Lev, Onno Boxma, Britt Mathijsen, David Perry, A blood bank model with perishable blood and demand impatience, Stochastic System, vol. 7, no.2, pp.237-262, 2017.

[3] Philipp Afeche, Adam Diamant, Joseph Milner, Double-sided batch queues with qbandonment: modeling crossing networks, Operations Research, vol.62, no.5, pp.973-1201, 2014.

[4] Yoshiaki Inoue, Comparison result for M/G/1 queues with waiting and sojourn time dead lines, Journal of Applied Probabilty, vol.56, no.2, pp.524-532, 2019.