日本オペレーションズ・リサーチ学会
2022年 春季研究発表会

2 段階分布的ロバスト Cournot–Nash 均衡問題と均衡解の存在性

05000516 京都大学 *堀 篤史 HORI Atsushi

1. はじめに

Nash 均衡問題（NEP）とは，プレイヤー（意思決定者），戦略，利得の三要素で構成される競合的状況において，どのプレイヤーも自身の戦略を変える動機を持たないような状態（Nash 均衡）を見つける問題である．

NEP の発展に伴い，確率変数が内在した情報不完備の NEP（SNEP）も考えられるようになり，確率変分不等式 (SVI) の枠組みで研究されてきた．しかし，これまでの SVI モデルは単一段階の意思決定による SNEP しか取り扱うことができず，確率的な決定プロセスに不可欠な情報のダイナミクスを定式化に反映できなかった．

Rockafellar と Wets は多段階 SVI [2] を考案し，一般的な多段階 SNEP を取り扱うためのモデルの土台を築いた．また，Rockafellar と Sun [3] は多段階 SVI に対する並列計算で効率的に解けるシナリオ集約法 (Progressive Hedging Method: PHM) を提案した．これらの研究が基盤となり，近年多段階 SNEP は理論と応用両方の側面で活発に研究されている．ところが，実社会に現れる SNEP は確率分布が必ずしも正確に予測できないため，分布不確実性の下での 2 段階 SNEP の研究が望まれているが，現在ほとんど研究されていない．

本研究では，分布不確実性の下での 2 段階確率 Cournot–Nash（CN）均衡問題の特別な場合に限定して考え，各プレイヤーがリスク回避の意思決定をするような，分布的ロバスト CN 均衡問題を提案し，その均衡解の存在性を明らかにする．ここで，CN 均衡問題とは寡占市場における各企業の同質の財の生産量と市場への供給量を戦略とする Cournot 競争における SNEP である．また，後半では均衡解を求めるためのシナリオ集約法 [3] をベースとした数値解法を提案する．

2. 2 段階分布的ロバスト Cournot–Nash 均衡問題と均衡解の存在性

本節では，既存の 2 段階確率的 Cournot–Nash 均衡問題を拡張し，分布不確実性の下で各プレイヤーが分布不確実性集合の中で最悪の場合における第二段階の期待利得を最大化するような 2 段階分布的ロバスト Cournot–Nash 均衡問題を提案し，均衡解の存在性を示す．

$\mathscr{P}(\Omega)$ を可測空間 $(\Omega, \mathcal{F})$ 上のすべての確率測度の集合とし，$\xi\colon \Omega \to \Xi \subset \mathbb{R}^m$ を確率変数とする．また，$\mathscr{P}(\Xi)$ を ξ によって導入された可測空間 $(\Xi, \mathcal{B}(\Xi))$ 上のすべての確率測度の集合とする．

添え字 $j \in \{1, \ldots, N\}$ によってラベル付けされたプレイヤー j は分布不確実性集合 $\mathscr{P}_j \subset \mathscr{P}(\Xi)$ の中で最悪の場合における第 2 段階の期待利得を想定しながら，自身の効用を最大化するような以下の 2 段階分布的ロバスト最適化問題を解く．

$$\max_{0 \le x_j \le M_j} \Theta_j(x_j, x_{-j}) \coloneqq \{\theta_j(x_j, x_{-j}) + \inf_{P \in \mathscr{P}_j} \mathbb{E}_P[Q_j(x_j, x_{-j}, \xi)]\}$$

変数 $x_j \in \mathbb{R}$ はプレイヤー j の戦略とし，x_{-j} はプレイヤー j を除くすべてのプレイヤーの戦略の組とする．関数 $\theta_j(\cdot, x_{-j})$ はプレイヤー j の第 1 段階における自身の利得関数であり，以下のように定義する．

$$\theta_j(x_j, x_{-j}) \coloneqq -\frac{1}{2} c_j x_j^2 - a_j x_j$$

ただし，$c_j > 0$，$a_j < 0$ とし，最大生産量 $M_j > 0$ は十分大きい実数とする．関数 $Q_j(\cdot, x_{-j}, \xi)$ は以下に定める第 2 段階（リコース問題）の最適値とする．

$$Q_j(x_j,x_{-j},\xi) \coloneqq \max_{y_j(\xi) \in \mathbb{R}} \{\gamma_j(y_j(\xi), y_{-j}(\xi), \xi) \mid 0 \le y_j(\xi) \le x_j\} \text{ almost every } \xi \in \Xi$$

利得関数 $\gamma_j(\cdot, y_{-j}(\xi), \xi)$ は以下のように定義する．

$$\gamma_j(y_j(\xi), y_{-j}(\xi), \xi) \coloneqq (p_j(\xi) - \gamma(\xi) \sum_{j=1}^{N} y_j(\xi)) y_j(\xi)$$

ただし，$p_j(\xi)$ はリスク調整されたスポット価格であり，$\gamma(\xi) \ge \gamma_0 > 0$ は市場の供給量を調整する役割を果たす市場メカニズムのパラメータである．

以上の設定の下，以下の定義を満たす解 $(x^*, y^*(\cdot))$ を見つける問題を 2 段階分布的ロバスト Cournot–Nash 均衡問題（TSDRCNEP）と呼ぶことにする．

Definition 1. 点 $(x^*, y^*(\cdot))$ が TSDRCNEP の分布的ロバスト CN 均衡解であるとは，すべてのプレイヤーに対して以下の条件が成り立つことである．

$$\Theta_j(x_j^*, x_{-j}^*) \ge \Theta_j(x_j, x_{-j}^*) \quad \forall x_j \in [0, M_j]$$

$$\gamma_j(y_j^*(\xi), y_{-j}^*(\xi), \xi) \ge \gamma_j(y_j(\xi), y_{-j}^*(\xi), \xi) \quad \forall y_j(\xi) \in [0, x_j] \text{ almost every } \xi \in \Xi$$

上記と同様の均衡解概念を定義した文献は存在するが，我々はリコース関数の分布的ロバスト性も考慮していることに注意する．

以下の定理で均衡解が存在する条件を与える．

Theorem 1. すべての j について，以下の性質が成り立つと仮定する．

(a) 分布不確実性集合 $\mathscr{P}_j$ は弱コンパクト集合である

(b) $\mathbb{E}_P[Q_j(x_j, x_{-j}, \xi)]$ は任意の (x_j, x_{-j}) と分布 $P \in \mathscr{P}_j$ に対して有限な値をとる

このとき，TSDRCNEP は分布的ロバスト CN 均衡解をもつ．

3. 2 段階分布的ロバスト変分不等式とシナリオ集約法

本節では，確率分布が離散型で与えられている場合に限定し，前節で定義した分布的ロバスト均衡解を求めるシナリオ集約法 [3] をベースとした数値解法を提案する．

以降，集合 Ξ は K 個のシナリオ $\Xi^K := \{\xi_1, \ldots, \xi_K\}$ によって構成し，対応するプレイヤー j の離散型分布不確実性集合を $\mathscr{P}_j^K \subset \mathbb{R}_+^K$ とし，凸集合と仮定する．このとき，点 $(x^*, y^*(\xi_1), \ldots, y^*(\xi_K))$ が TSDRCNEP の分布的ロバスト CN 均衡解であることは，ある $P^* \in \mathscr{P}^K = \mathscr{P}_1^K \times \cdots \times \mathscr{P}_N^K$ と $\lambda^*(\xi) \geq 0$ $(\forall \xi \in \Xi^K)$ が存在して [1]，以下の 2 段階分布的ロバスト変分不等式を満たすための必要十分条件であることが示せる．

$$0 \in F(x^*) - \mathbb{E}_{P^*}[\lambda^*(\xi)] + \mathcal{N}_{[0,M]}(x^*) \tag{1}$$

$$0 \in \begin{bmatrix} G(y^*(\xi), \xi) + \lambda^*(\xi) \\ x^* - y^*(\xi) \end{bmatrix} + \mathcal{N}_{[0,\infty)}\left(\begin{bmatrix} y^*(\xi) \\ \lambda^*(\xi) \end{bmatrix}\right) \ \forall \xi \in \Xi^K \tag{2}$$

$$P_j^* \in \arg\max_{P \in \mathscr{P}_j^K} \mathbb{E}_P[Q_j(x_j^*, x_{-j}^*, \xi)], \ j = 1, \ldots, N \tag{3}$$

ただし，$M := (M_1, \ldots, M_N) \in \mathbb{R}^N$ とし，

$$F(x) := [\nabla_{x_j} \theta_j(x_j, x_{-j})]_{j=1}^N$$
$$G(y(\xi), \xi) := [\nabla_{y_j} \gamma_j(y_j(\xi), y_{-j}(\xi), \xi)]_{j=1}^N$$

とする．ここで，$\mathcal{N}_S(z) := \{u \mid \langle u, v - z\rangle \leq 0 \ \forall v \in S\}$ は閉凸集合 S の点 z における法線錐とする．

条件 (1)–(3) を満たす分布的ロバスト CN 均衡解を求めるための数値解法を Algorithm 1 のように提案した．ここで，$r, s > 0$ はアルゴリズムのパフォーマンスを決める正則化パラメータである．

数値実験の結果は当日述べる．

Algorithm 1 Inexact PHM for solving (1)–(3)

Input: $(x^0, y^0(\cdot), \lambda^0(\cdot))$, $P^0 \in \mathscr{P}^K$ and w^0 such that $\sum_{\xi \in \Xi^K} w^0(\xi) = 0$

Output: $(x^*, y^*(\cdot), \lambda^*(\cdot))$ and P^*

1: Set $\nu = 0$ and for all $\xi \in \Xi^K$, set $x^\nu(\xi) := x^0$.

2: If $(x^\nu, y^\nu(\cdot), \lambda^\nu(\cdot))$ and P^ν satisfy a stopping criterion, terminate algorithm.

3: For each scenario $\xi \in \Xi^K$, obtain a unique solution $(\hat{x}^\nu(\xi), \hat{y}^\nu(\xi), \hat{\lambda}^\nu(\xi))$ to

$$0 \in F(x(\xi)) - \lambda(\xi) + w^\nu(\xi) + r(x(\xi) - x^\nu(\xi)) + \mathcal{N}_{[0,M]}(x(\xi))$$

$$0 \in \begin{bmatrix} G(y(\xi), \xi) + \lambda(\xi) \\ x(\xi) - y(\xi) \end{bmatrix} + r\begin{bmatrix} y(\xi) - y^\nu(\xi) \\ \lambda(\xi) - \lambda^\nu(\xi) \end{bmatrix} + \mathcal{N}_{[0,\infty)}\left(\begin{bmatrix} y(\xi) \\ \lambda(\xi) \end{bmatrix}\right)$$

4: For each j, obtain the worst-case distribution

$$P_j^\nu \in \arg\max_{P \in \mathscr{P}_j^K} \sum_{k=1}^K P_k \gamma_j(\hat{y}_j(\xi_k), \hat{y}_{-j}(\xi_k), \xi_k) - \frac{s}{2}\|P - P_j^\nu\|^2$$

5: Let $\bar{x}_j^{\nu+1} = \sum_{k=1}^K (P_j^\nu)_k \hat{x}_j^\nu(\xi_k)$ for $j = 1, \ldots, N$, and for all $\xi \in \Xi^K$, let

$$x^{\nu+1}(\xi) = \bar{x}^{\nu+1}, \ y^{\nu+1}(\xi) = \hat{y}^\nu(\xi)$$
$$w^{\nu+1}(\xi) = w^\nu(\xi) + r(\hat{x}^\nu(\xi) - \bar{x}^{\nu+1})$$

6: Set $\nu = \nu + 1$ and go to line 2.

4. おわりに

本研究の貢献は次の通りである．

- 2 段階分布的ロバスト Cournot–Nash 均衡問題を提案し，均衡解の存在性を示した
- シナリオ集約法 [3] をベースとした，分布的ロバスト Cournot–Nash 均衡解を求めるためのアルゴリズムを提案した

謝辞：本原稿の校閲をしていただいた京都大学山下信雄教授に感謝の意を表します．

参考文献

[1] X. Chen, H. Sun, and H. Xu: Discrete approximation of two-stage stochastic and distributionally robust linear complementarity problems, *Math. Program. A* 177, 255–289, 2019.

[2] T. Rockafellar and R.J.B. Wets, Stochastic variational inequalities: single-stage to multistage, *Math. Program. B* 165, 331–360, 2017.

[3] T. Rockafellar and J. Sun, Solving monotone stochastic variational inequalities and complementarity problems by progressive hedging, *Math. Program. B* 174, 453–471, 2019.