日本オペレーションズ・リサーチ学会
2022年 春季研究発表会

階層分析法の一対比較表に含まれる最大誤差に関する研究

01014803　公立諏訪東京理科大学　*飯田洋市　IIDA Yoichi
05000630　秀明大学　大山口菜都美　OYAMAGUCHI Natsumi

1.　はじめに

1970 年代に T.L. サーティにより創始された階層分析法は直観や経験などの主観的要素を意思決定モデルに定量的に組み込みことで，人間の意思決定を客観的にとらえようとする意思決定支援法である．意思決定者による一対比較表から各項目の重要度を算出する方法として固有ベクトル法を採用している．なお，固有ベクトル法による重要度の算出は階層分析法に特有な方法ではない．

一方，意思決定支援の視点からバナ・エ・コスタらは，意思決定者の価値判断による一対比較結果から各項目の重要度を算出するための重要度付け関数が満たすべき 2 つの条件を挙げ，固有ベクトル法は上記の性質を満たさないことなどから，重要度付けとして機能していないことを指摘した（[1]）．さらに，階層分析法で活用される整合度指標 C.I.（Consistency Index）が，上記の 2 条件が満たされない状況を排除できないとして, 階層分析法は欠陥があるともしている．他方，クラコフスキーは一対比較行列に含まれる誤差の最大値に着目することで，それらの条件を満たすようにできることを示した（[4]）．

本研究の目的は，クラコフスキーが示した定理を応用することで，誤差の最大値と整合度指標の関係を明確にし，シミュレーションによりそれらの関係について検討することである．なお，本報告では，バナ・エ・コスタらが指摘した条件のうち一方のみ扱う．

2.　順序維持条件

複数の項目 c_i（階層分析法であれば評価基準や代替案）の相対的な重要度とは, 各項目が持つ，判断者の直観的な重要性に対して実数値を割り当てたものである．この対応関係を表すものが，重要度付け関数である（以下, w). バナ・エ・コスタらは意思決定支援の視点から, この関数が満たすべき次の 2 つの順序維持条件を挙げた（[1]）:

· $c_i \succ c_j \Rightarrow w(c_i) > w(c_j)$.
· $c_i/c_j \succ c_k/c_l \Rightarrow w(c_i)/w(c_j) > w(c_k)/w(c_l)$.

そして, 前者を選好の順序維持条件, 後者を選好強度の順序維持条件と呼び，階層分析法はこれらの条件を満たすように設計されていないことを指摘し, いくつかの事例を挙げた．階層分析法では $c_i \succ c_j$ は $a_{ij} > 1$ を意味するが，上記を満たす $w(c_i)$ の組みが存在するにもかかわらず, 固有ベクトル法はそれを見つけられないと批判した.

3.　一対比較行列の整合度指標

クラコフスキーは一対比較値が持つ誤差に着目することで, バナ･エ･コスタらの批判に回答する形で, 順序維持条件が成り立つための C.I. の範囲について検討した（[4]）．よく知られるように，各一対比較値 a_{ij} の誤差 $e(i,j)$ は一対比較行列 $A = (a_{ij})$ とそれから求められる重要度ベクトル $\boldsymbol{w} = (w(c_j))$ を用いて定義される： $e(i,j) = a_{ij} \cdot w(c_j)/w(c_i)$. 階層分析法では固有ベクトル法で A から $\boldsymbol{w}$ を求める．クラコフスキーは，一対比較行列 A に対して誤差の大きさの最大値を以下のように定義した:

定義 ([4]). 一対比較行列 A と重要度ベクトル $\boldsymbol{w}$ に対して, 各成分 a_{ij} に対する誤差の大きさ $\mathscr{E}(i,j)$ と A に対する誤差の大きさの最大値 $\mathscr{E}_{max}(A,\boldsymbol{w})$ を以下のように定義する:

· $\mathscr{E}(i,j) \stackrel{\text{def}}{=} \max\{e(i,j)-1, e(j,i)-1\}$
· $\mathscr{E}_{max}(A,\boldsymbol{w}) \stackrel{\text{def}}{=} \max_{i,j=1,\dots,n} \mathscr{E}(i,j)$

クラコフスキーは次の定理と系を示した．以下, A は一対比較行列, $\boldsymbol{w}_{\text{ev}}$ は A から固有ベクトル法で求められる重要度ベクトルとする：

定理 1. $\mathscr{E}_{max}(A,\boldsymbol{w}_{\text{ev}}) \le \delta \Rightarrow \text{C.I.} \le \delta$.

定理 2. ある $\delta > 0$ に対し, 任意の i,j $(i \neq j)$ に対して, $\mathscr{E}(i,j) < \delta$ かつ $a_{ij} \ge \delta + 1$ であるとき, 次が成り立つ: $a_{ij} > 1 \Rightarrow w(c_i) > w(c_j)$.

系 1. ある $\delta > 0$ に対し, 任意の i,j $(i \neq j)$ に対して $a_{ij} \ge \delta + 1$ かつ $\mathscr{E}_{max}(A,\boldsymbol{w}_{\text{ev}}) < \delta$ であるとき, 選好の順序維持条件が成り立つ.

クラコススキーは系1から，$\mathscr{E}_{max}(A, \boldsymbol{w})$ が C.I. の代わりに整合性の判定指標として活用できるかもしれないと記載している

4. サーティによる整合度判定指標

サーティは一対比較行列の整合度の判定に C.R.（Consistensy Ratio）を推奨している（[5]）．C.R. は C.I. の平均値 R.I.（Random Index）に対する，整合性を判定したい一対比較行列の C.I. の比である（C.R.=C.I./R.I）．また，R.I. は 50,000 個の一対比較行列をランダムに生成し，そこから得られる C.I. の平均として求められている．

表 1: 比較項目数 3 から 7 に対する C.I. と C.R.([5])

項目数	C.I.	R.I.	C.R.
3	0.026	0.52	0.05
4	0.071	0.89	0.08
5	0.111	1.11	0.10
6	0.125	1.25	0.10
7	0.135	1.35	0.10

ただし，実務では一対比較行列の整合性の判定に C.I. が多用されていることは周知の事実である．なお, サーティは $e(i, j)$ を摂動（心の揺れ）と呼び，C.I. に関するいくつもの解釈を与えている．

5. 整合度指標と最大誤差の関係

クラコフスキーの定理 1 から, 以下を得る：

<u>定理 A.</u> C.I. $\leq \mathscr{E}_{max}(A, \boldsymbol{w})$.

定理 A に関して， サーティが R.I. を得た手法を改良して，プログラミング言語 Python3.8.5 を用いてシミュレーションを行った．まず一対比較行列の対角成分より上の部分の成分に，1 から 9 までの整数値をランダムに代入し，逆数性を利用して一対比較行列を生成する．これは任意の一対比較行列に適当な置換行列を左右から乗ずることで，そのような一対比較行列を得られることによる（[2]）．そして，この一対比較行列の C.I. を計算し 0.1 未満である場合に限り $e(i, j)$ の最大値を求め，これらをデータとしてストックしていく．最終的に 50,000 組のデータを生成し，C.I. と最大誤差の関係を検討した．図 1 は比較項目数が 5 の場合の散布図（横軸が C.I.，縦軸が誤差の最大値）である．なお，誤差の最大値は 1 以上であることは理論的に明らか．図 1 より，たとえば，C.I. が 0.05 より小さい場合にほぼ最大誤差が 2 未満とできることなどがわかる．同様の考察から，$\mathscr{E}_{max}(A, \boldsymbol{w})$ から C.I.（あるいは R.I.）を制御できるかもしれないことが分かった．これにより，誤差を制御することで選好の順序維持条件を満たせることになる．

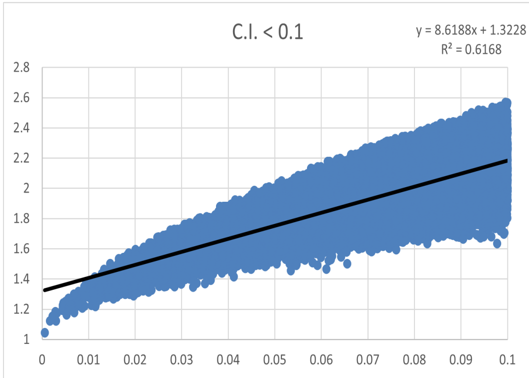

図 1: C.I. と最大誤差の散布図 (n=50,000)

6. おわりに

判断者による一対比較行列から比較項目の重要度を算出する場合に求められる選好の順序維持条件について数値解析的に検討した．これらについて解析的に証明するとともに, 選好強度の維持条件について検討することが今後の課題である．

参考文献

[1] Bana e Costa, C.A. & Vansnick, J.: A critical analysis of the eigenvalue method to derive priorities in AHP. European Journal of Operational Research, 187, 1422–1428 (2008).

[2] Iida, Y.: Standardizaions and notation of a pairwise comparison matrix in the AHP, Journal of Japanese Symposium on the Analytic Hierarchy Process, No.2, 85-93, (2010).

[3] Iida, Y. and Oyamaguchi, N.: Relationship between consistency index and perturbation in AHP (preprint).

[4] Kułakowski, Konrad.: Notes on order preservation and consistency in AHP. European Journal of Operational Research, 245, 333–337 (2015).

[5] Saaty, T.L.: Principia Mathematica Decernendi. Pittsburgh: RWS Publications (2010).