階層分析法における意思決定者目線での一対比較値の修正法

05000630　秀明大学　　*大山口菜都美　OYAMAGUCHI Natsumi
01014803　公立諏訪東京理科大学　飯田洋市　IIDA Yoichi

1. はじめに

Analytic Hierarchy Process (以下，AHP) は，T. L. Saaty によって 1970 年代に提唱され，人間の直観や経験など，定性的な情報を定量的な情報にして意思決定モデルに組み込む手法として，様々な分野で活用されている．

相対評価する n 個の項目からなる集合を $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ とする．一対比較行列 A を得るために，意思決定者は x_i と x_j の重要性の関係を Saaty 尺度 (表 1) を用いて一対比較することで，a_{ij} または a_{ji} の値を決める．ただし $a_{ii} = 1$，$a_{ij}a_{ji} = 1$ とする．

一対比較値	定義
1	Equal importance
3	Moderate importance
5	Strong importance
7	Very strong or demonstrated importance
9	Extreme importance
2,4,6,8	Intermediate values

表 1: Saaty 尺度

次に，得られた一対比較行列 A から，重要度ベクトル $\boldsymbol{w} = (w_1, w_2, \ldots, w_n)$ を求める．複数の項目の重要度を数値化して，意思決定者の主観を数値化することで，自分の感覚を客観的に理解することができる．ただし，一般に，A はある種の矛盾を含むことが知られている．この矛盾の入り具合を，一対比較行列の整合度という．

もし，一対比較行列の整合度が悪い場合は，一対比較値を見直すことになる．AHP では，固有ベクトル法により求めた重要度ベクトルを利用して見直すことになるが，機械的に計算された重要度ベクトルにより一対比較値の修正を求められるのは，意思決定者の納得を得にくいといえる．さらに，一対比較において意思決定者が行うのは項目 x_i と x_j の重要度の相対評価であることにも注意すべきである．

本報告では，意思決定者の視点から，意思決定時に入り込んでしまう矛盾に着目した一対比較値の修正方法について検討した結果について報告する．具体的には，誤差 ε_{ij} が存在する範囲を考察した修正モデルを提案する:

$$\varepsilon_{ij} = a_{ij} w_j / w_i.$$

2. Saaty が提案する修正モデル

Saaty[1] は，一対比較行列 A の整合性を測る指標として C.I. (Consistency Index) を定義している：

$$\mathrm{C.I.} = (\lambda_{\max} - n)/(n-1).$$

一般に，C.I. は 0 以上であり，C.I.$= 0$ のとき，一対比較行列 A は完全整合している．

さらに，Saaty は，C.I. を C.I. の平均値とされる R.I. (Random Index) で割った値を C.R. (Consistency Ratio) と定義し，A の不整合性が許容できるかの判断として C.R. を使うとした．

そして，許容できない場合には，以下の 3 つの手順を提案した:

(1) 固有ベクトル法により算出される重要度ベクトルから判断される，最も整合度の悪い一対比較値 a_{ij} を見つける．
(2) (1) の a_{ij} について，一対比較行列 A の整合性が改善するための一対比較値の幅を算出する．
(3) (2) で得られた幅に基づいて，意思決定者に一対比較値の修正を薦める．修正を意思決定者が受け入れられない場合は，(1) にて，次に整合度の悪い一対比較値を見つけ，同様のことを繰り返す．

以上の手続き後も，整合性が許容できる範囲まで改善しない場合には，新しく得られる一対比較行列に対して，(1) に戻って同様の手順を繰り返す．

以上のことから，1 節で指摘したように，意思決定者による一対比較行列から機械的に求めた重要度ベクトルにより一対比較値の修正を求めているといえる．

3. 一対比較値の誤差について

意思決定者は x_i と x_j の重要性の関係を Saaty 尺度で回答することで，成分が {1/9, 1/8, 1/7, 1/6, 1/5, 1/4, 1/3,1/2, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9} の要素からなる一対比較行列 $A = (a_{ij})$ を得る．

ところで，意思決定者が x_i と x_j を一対比較して一対比較値 a_{ij} を与えるということは，x_i と x_j の重要度の比である w_i/w_j を推定していることに注意する．

まず，$a_{ij} \geq 1$ の場合を考える．このとき，$n \leq w_i/w_j < n+1$ あるいは $n-1 \leq w_i/w_j < n$ なる $n \in \mathbb{Z}$ が存在する．よって，a_{ij} は，$n-1, n, n+1$ のいずれかと予想される．したがって，次のように考えられる:

$$a_{ij} - 1 \leq w_i/w_j \leq a_{ij} + 1.$$

ここで，$\varepsilon_{ij} = a_{ij}w_j/w_i$ より，

$$a_{ij}/(a_{ij}+1) \leq \varepsilon_{ij} \leq a_{ij}/(a_{ij}-1).$$

例えば，意思決定者が $a_{ij} = 3$ を選んだとき，$2 \leq w_i/w_j \leq 4$ であると考えられる．よって，

$$3/4 \leq \varepsilon_{ij} \leq 3/2.$$

同様に，$a_{ij}(\geq 1)$ の各一対比較値に対応する ε_{ij} の上限と下限および誤差の取りうる範囲を求めた (表 2)．また，これをグラフで表した (図 1)．

一対比較値	下限 $\overline{\varepsilon_{ij}}$	上限 $\overline{\varepsilon_{ij}}$	上限 − 下限
a_{ij}	$\dfrac{a_{ij}}{a_{ij}+1}$	$\dfrac{a_{ij}}{a_{ij}-1}$	$\dfrac{2a_{ij}}{a_{ij}^2-1}$
1	1/2	$+\infty$	$+\infty$
2	2/3	2/1	4/3
3	3/4	3/2	6/8
4	4/5	4/3	8/15
5	5/6	5/4	10/24
6	6/7	6/5	12/35
7	7/8	7/6	14/48
8	8/9	8/7	16/63
9	9/10	9/8	18/80

表 2: 誤差の範囲

$a_{ij} < 1$ の場合は，$a_{ji} > 1$ であり，$\varepsilon_{ji} = 1/\varepsilon_{ij}$ なので，表 2 から求めることとする．実際，一対比較値を求めるときには Saaty 尺度を使うため，$a_{ij} \geq 1$ と考えることは妥当であるといえる．

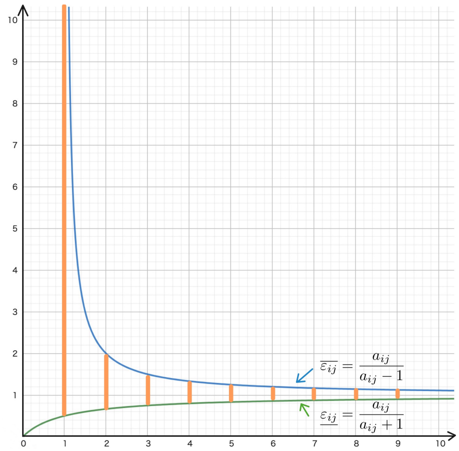

図 1: 上限 $\overline{\varepsilon_{ij}} = \frac{a_{ij}}{a_{ij}-1}$ と下限 $\underline{\varepsilon_{ij}} = \frac{a_{ij}}{a_{ij}+1}$

4. 考察

表 2 と図 1 から，次のことがわかる:

- 一対比較値により，誤差の範囲が異なる．
- 誤差の入り方は下限と上限で対称ではない．
- Saaty 尺度「1」には，誤差が入りやすい．
- Saaty 尺度「9」には，誤差が入りにくい．
- 上限は単調減少であり下限は単調増加である．

Saaty[2] によると，一対比較の際に 2 つの要素の重要度が非常に近い場合は，1.1-1.9 のように小数を使って評価するよう提案している．これは，Saaty 尺度「1」を与える際に誤差が入りやすい点を意識させ，より慎重に一対比較を行わせる意図と考えられる．

5. おわりに

本報告では，意思決定者の視点から，意思決定時に入り込んでしまう矛盾に着目した一対比較値の修正方法について検討した．結果として，意思決定者が一対比較の際に選択する Saaty 尺度により，誤差の分布が異なることを示すことができた．具体的に，誤差の分布に基づく整合度を高めるための修正モデルの提案は，今後の課題である．

参考文献

[1] Saaty, T.L., The Analytic Hierarchy Process, New York: McGraw-Hill, 1980.

[2] Saaty, T.L., Mathematical Principles of Decision Making, Pittsburg: RWS Publications, 2009.