ラグランジュ緩和法における実行可能性の担保

05000107 （株）NTT データ数理システム　*原田耕平　Kouhei Harada

1.　はじめに

本発表では，以下の分解可能で大規模な数理計画問題 (P) に対するラグランジュ緩和法を考察する．

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & f(x) \\ \text{subject to} & g(x) \le b, \\ & x \in X, \end{array} \tag{1}$$

ここで $x = (x_1, \cdots, x_{|I|})$, $X = X_1 \times \cdots \times X_{|I|}$, $x_i \in X_i \subset \mathbb{R}^{n_i}$ および $f(x) = \sum_{i \in I} f_i(x_i)$, $g(x) = \sum_{i \in I} g_i(x_i)$, $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ であるとする．本発表では特に， $m \ll |I|$ の場合を考える．

ラグランジュ緩和法は，制約 (1) の緩和に対する以下の双対問題 (D) を最適化する．

$$\begin{array}{ll} \text{maximize} & b^T y + \sum_{i \in I} \max_{x_i \in X_i} (f_i(x_i) + y^T g_i(x_i)) \\ \text{subject to} & y \ge 0. \end{array}$$

双対最適解 y^* は必ずしも主最適解 x^* を担保しない．しかし，双対最適化の過程で，途中の双対変数 y に対して以下のラグランジュ緩和解 $x^*(y)$ が得られるため，ラグランジュ緩和法では，これらを利用して準最適解を構築する．

$$x^*(y) \in X^*(y) = \arg\min_{x \in X} \left\{ f(x) + y^T g(x) \right\}.$$

ラグランジュ緩和解の導出が i 毎に分解可能であることが，大規模問題に対するラグランジュ緩和法の有用性の基礎となっている．

$$\begin{aligned} X^*(y) &= X_1^*(y) \times \cdots \times X_{|I|}(y), \\ X_i^*(y) &= \arg\min_{x_i \in X_i} \left\{ f_i(x_i) + y^T g_i(x_i) \right\}. \end{aligned}$$

ラグランジュ緩和法は，分解可能で大規模な数理計画問題を解く有用な手法として広く知られている．一方でこの手法には欠点があり，それは

1. 最適解が必ずしも求まらないこと
2. 解の実行可能性が担保されないこと

である．特に 2 番目の実行可能性に関する欠点は，現実の問題を取り扱う場合に非常に大きな障壁となりうる．

2.　主問題の凸化とギャップ

前節で述べた欠点が生じる原因は，ラグランジュ緩和法で解いている双対問題は，原問題を閉凸化した以下の問題（convP）に対応していることによる [1].

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & (\check{\text{cl}}\, f|_X)(x) \\ \text{subject to} & (\check{\text{cl}}\, g|_X)(x) \le b, \\ & x \in \text{conv}\,(X)\,, \end{array}$$

ここで $\check{\text{cl}}\, f|_X$ は関数 f の X 上への制限 $f|_X$ を閉凸化した関数である．$\check{\text{cl}}\, f|_X = \check{\text{cl}}\,(f|_X) \ne (\check{\text{cl}}\, f)|_X$ であることに注意する．

(convP) と (D) の間には通常は双対ギャップが存在しないが， (P) と (convP) との間にギャップがあるため，前節の欠点 1, 2 が生じる．より端的には，(convP) の最適解 $\check{x}^*$ は (P) の最適解とは限らず， $\check{x}^* \in \text{conv}\,(X)$ は成立しても $\check{x}^* \in X$ とは限らないので，実行可能性も担保されない．

3.　双対ギャップの評価

これらの欠点があるにも関わらず，ラグランジュ緩和法の成功例は多数報告されている．その根拠の一つが [2, Section 5.6][3, Section 5.1] にて言及されており，その関係式を以下に示す．

$$f(x^*) - (\check{\text{cl}}\, f|_X)(\check{x}^*) \quad \le \quad (m+1) \max_{i \in I} \rho_i, \tag{2}$$

ここで， ρ_i は f_i, g_i, X_i から定まる値である．つまり，(P) と (D) の間の双対ギャップには，分割される問題数 $|I|$ ではなく，緩和する制約数 m が本質的に影響する．このため，本稿で考察する $m \ll I$ の場合，ラグランジュ緩和法が有効に機能する事が期待される．

4.　Vujanic の研究

双対ギャップの評価式 (2) は，最適解の質が保証できるという理論面では有用であるが，実行可能性を保持した準最適解の構築方法を具体的に提示している訳ではなく， 2 番目の欠点は依然解消されていない．Vujanic [5] はこれらの研究を発展

させ，以下の条件を付与することで，実行可能性を担保する手法を提案した．

(V1) (convP) が唯一の主最適解 $\check{x}^*$ を持つ．

(V2) (D) が唯一の双対最適解 y^* を持つ．

(V3) f および g は凹関数である．

(V4) X_i は以下で定まる混合整数多面体である．
$$X_i = \{x_i \in \mathbb{R}^{r_i} \times \mathbb{Z}^{z_i} \mid A_i x \leq d\}$$

(V3) で仮定するのは凸性でなく凹性であることに注意する．この仮定の下，以下が成り立つ．

Theorem 1 *[5, Theorem 2.5] (V1)* から *(V4)* の成立を仮定する．このとき，少なくとも $|I| - m$ 個の i に関して， $X_i^*(y^*) \cap \mathrm{vert}\,(X_i) = \{\check{x}_i^*\}$ が成立する．ここで $\mathrm{vert}\,(X_i)$ は X_i の頂点全体から成る集合である．

Theorem 1 は，双対最適解 y^* に対するラグランジュ緩和解 $x^*(y^*)$ の大半の要素が，(convP) の最適解 $\check{x}^*$ と一致することを主張している．Theorem 1 の主張を理解するには，ナップサック問題が分かり易い [4, Example 1].

$$\begin{aligned} &\text{maximize} && x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 \\ &\text{subject to} && 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 \leq 5, \\ &&& x_i \in X_i = \{0, 1\},\ i \in \{1, \cdots, 4\}. \end{aligned}$$

双対最適解 $y^* = 1$ に対するラグランジュ緩和解の集合は $X_1^*(y^*) = \{0\}$, $X_2^*(y^*) = \{0, 1\}$, $X_3^*(y^*) = \{1\}$, $X_4^*(y^*) = \{1\}$ となる．一方で凸緩和（この例では連続緩和）した解は $\check{x}^* = (0, 1/2, 1, 1)$ となり，$i = 1, 3, 4$ に関して一致する．このような i の数は $4-1 = 3$ で定まる．追加の制約 $3x_3+3x_4 \leq 4$ を付与すると，新たな双対最適解 $y^* = (1/2, 2/3)$ に対するラグランジュ緩和解の集合は $X_1^*(y^*) = \{0, 1\}$, $X_2^*(y^*) = \{1\}$, $X_3^*(y^*) = \{0, 1\}$, $X_4^*(y^*) = \{1\}$ となり，新たな $\check{x}^* = (1/6, 1, 1/3, 1)$ と $i = 2, 4$ に関して一致する．このような i の数は $4 - 2 = 2$ で定まる．

Theorem 1 により，実行可能性を損ねる要因は高々 m 個の i であることが示唆されるため，これらの影響を事前に見積もり b から差し引く事で，実行可能性の担保が可能となる [5, Theorem 3.1].

5. Harada の研究

Vujanic の研究 [5] は，最も応用範囲が広い混合線形整数計画問題 (MILP) を含んでいるが，f, g, X がより一般的な場合には対応していない．Harada [4] は， Vujanic の研究 [5] を発展させ，以下の設定でも実行可能性が担保できることを示した．

(A1) (convP) が唯一の主最適解 $\check{x}^*$ を持つ．

(A2) (D*) が唯一の双対最適解 y^* を持つ．

(A3) $X_i^*(y^*)$ の任意の要素は $X_i^*(y^*)$ の端点である．

ここで，(A1) = (V1) であり，(A2) における (D*) は双対問題 (D) における X を $X^*(y^*)$ に制限した問題である．また， (A3) の条件は一見厳しく思えるが，実は以下のように広い適用範囲を持つ [4, Proposition 4].

Proposition 2 f_i が狭義凸関数で， g_i が凸関数の場合， i について *(A3)* が成り立つ．

Proposition 2 は（狭義）凸関数の部分を（狭義）凹関数に変えても成り立つ．このため，(A3) の成立に際して f, g 全体での凸性や凹性は要求されない事に注意する．この条件下で，以下が成立する．

Theorem 3 *[4, Theorem 4] (A1)* から *(A3)* の成立を仮定する．このとき，少なくとも $|I| - m$ 個の i に関して， $X_i^*(y^*) = \{\check{x}_i^*\}$ が成立する．

この結果を利用すると，前述した [5, Theorem 3.1] と同様に，実行可能性を担保することができる [4, Theorem 5].

参考文献

[1] Geoffrion, Arthur M: Lagrangean relaxation for integer programming, *Approaches to integer programming*, Springer (1974).

[2] Bertsekas, Dimitri P: *Constrained optimization and Lagrange multiplier methods*, Academic Press (1982).

[3] Bertsekas, Dimitri P: *Nonlinear Programming*, Athena Scientific Belmont (1999).

[4] Kouhei, Harada: A Feasibility-Ensured Lagrangian Heuristic for General Decomposable Problems, *Operations Research Forum* (2021).

[5] Vujanic, Robin and Esfahani, Peyman Mohajerin and Goulart, Paul J and Mariéthoz, Sébastien and Morari, Manfred: A decomposition method for large scale MILPs, with performance guarantees and a power system application, *Automatica* (2016).