最大納期遅れ最小化基準における ロバストバッチスケジューリング

05000348　静岡大学　*呉偉　WU Wei
成蹊大学　梅野慶人　UMENO Keito
名古屋大学　渡邉夢大　WATANABE Yumehiro

1. はじめに

本稿では，ジョブ数が n のときの最大納期遅れ最小化バッチスケジューリングを考える．直列バッチ問題に対して，Webster と Baker [1] は，EDD (earliest due date) 順が最適なジョブ処理順列の一つであることを示した上，バッチ分け問題に対して $\mathcal{O}(n^2)$ 計算時間の動的計画法を提案した．並列バッチ問題に対して，Brucker ら [2] は，SPT (shortest processing time) 順が最適処理順列の一つを示し，バッチ分け問題に対して同じ時間計算量の厳密解法を提案した．Wagelmans ら [3] は，並列バッチのバッチ分け問題に対して Brucker らの動的計画法を改善し，$\mathcal{O}(n \log n)$ 時間の解法を提案した．

遅延ジョブの発生数の上限が Γ のとき，最大納期遅れ最小化バッチスケジューリングの入力処理時間に不確かさを考慮する．ロバスト直列バッチ問題に対して，古典的な問題と同じ計算時間（$\mathcal{O}(n^2)$）の厳密解法を与える．また，ロバスト並列バッチ問題に対して，上下界両方の得られる $\mathcal{O}(n^2\Gamma)$ 時間発見的解法を提案する．

2. 最大納期遅れ最小化ロバストバッチスケジューリング問題

最大納期遅れ最小化バッチスケジューリング問題とは，ジョブ集合 $J = \{1, 2, \ldots, n\}$，各ジョブ j の処理時間 p_j，納期 d_j と段取り時間（セットアップ時間）s が与えられるとき，1台のマシンに対し，各ジョブ j の納期遅れ L_j（完了時刻 C_j-納期 d_j）の最大値が最小となるジョブの処理順列 π と処理順列の分割 φ（バッチサイズの順列）を求める問題である．各ジョブの完了時刻は同じバッチに属するジョブの中の最大完了時刻と等しくなる．バッチに属するジョブの処理方式としては，直列で処理する s-batch 方式と並列で処理する p-batch 方式が存在し，それらに対応する問題をそれぞれ $1\,|\,\text{s-batch}\,|\,L_{\max}$ と $1\,|\,\text{p-batch}\,|\,L_{\max}$ と記する．$1\,|\,\text{p-batch}\,|\,L_{\max}$ に対して，並列処理を行うため，段取り時間 s を処理時間の一部として見なすことができる．一般性を失わず，本研究では，$1\,|\,\text{p-batch}\,|\,L_{\max}$ に対して，段取り時間 s を考慮しないことにする．

実践の世界では，設備不良による作業遅延や，不良品発生などの不測の事態による追加作業が発生することで処理が予定通りに行われない場合が多々ある．ジョブ j に対して，予定通りに処理した際の処理時間（基準処理時間）を $\bar{p}_j$，不良品の発生やジョブ遅延などによる追加処理時間の上限を δ_j，歩留りロスまたは遅延ジョブ発生数の上限数を Γ（歩留りロス率・遅延ジョブ発生率 Γ/n）とする．処理時間に関する不確定集合を以下のようにおく：

$$P = \left\{ (p_1, p_2, \ldots, p_n) \;\middle|\; \forall j \in J, p_j = \bar{p}_j + \gamma_j \delta_j, \right.$$
$$\left. 0 \le \gamma_j \le 1; \sum_{j \in J} \gamma_j \le \Gamma \right\}.$$

ロバストバッチスケジューリング問題に対して処理順列の決め方には，以下の理論成果を示す：

補題 1. $1\,|\,\text{s-batch}\,|\,L_{\max}$ と $1\,|\,\text{p-batch}\,|\,L_{\max}$ のロバスト最適化問題に対して，ジョブの処理順列が EDD 順となる最適解が存在する．

記述の便宜上，本節からジョブの番号順を EDD 順とする．シナリオが p，バッチサイズの順列が φ のときの $1\,|\,\text{s-batch}\,|\,L_{\max}$ と $1\,|\,\text{p-batch}\,|\,L_{\max}$ における最大納期遅れをそれぞれ $L^{\mathrm{s}}(p, \varphi)$ と $L^{\mathrm{p}}(p, \varphi)$ とし，それらのロバスト最適化問題は以下のように表現できる：

$$\text{S-RBP} \qquad \min_{\varphi} \max_{p \in P} \; L^{\mathrm{s}}(p, \varphi),$$

$$\text{P-RBP} \qquad \min_{\varphi} \max_{p \in P} \; L^{\mathrm{p}}(p, \varphi).$$

3. S-RBP に対する多項式時間厳密解法

解 φ が与えられるとき，ジョブ $i, i+1, \ldots, j-1$ から構成されるバッチに対して，最悪シナリオ

($\max_{p\in P}\ L^{\mathrm{s}}(p,\varphi)$ となる p）のもとで各ジョブの完了時刻に含まれる追加処理時間の合計 Δ_j は，前後のバッチ構成に依存せず，j のみで決められる．具体的には，Δ_j は，ジョブ $k\in\{1,\ldots,j-1\}$ の中 δ_k を非増加順に並んだ後，先頭から $\min\{j-1,\Gamma\}$ 位までの δ_k の和になる．納期を $d'_k = d_k - \Delta_j$ とみなすことで，基準処理時間の下での完了時刻を用いて最大納期遅れの計算ができる．そのような納期修正を利用して，S-RBP に対する動的計画法を提案する．開始時刻を 0 とおき，ジョブ集合が $\{i, i+1,\ldots,n\}$ となる部分問題の最適値を $f(i)$ と定義する．$f(n+1) = -\infty$ とし，$i = n, n-1,\ldots,1$ に対する漸化式は

$$f(i) = \min_{j=i+1}^{n+1}\left\{s + \sum_{k=i}^{j-1} p_k + \max\{\Delta_j - d_i, f(j)\}\right\}.$$

となる．値 $\sum_{k=i}^{j-1} p_k$ と Δ_j を全て前処理で計算することにより，後方からの計算で最適値 $f(1)$ を $\mathcal{O}(n^2)$ 時間で得ることができる．

定理 1. S-RBP に対する提案手法は $\mathcal{O}(n^2)$ 時間の厳密解法である．

また，Δ_j の定義を少し拡張することで，提案した厳密解法は Γ が整数でないときにも適用できる．

4. P-RBP に対する発見的解法

P-RBP に対する動的計画法を提案する．開始時刻を 0 とおき，ジョブ集合が $\{i, i+1,\ldots,n\}$，遅延するジョブの個数上限が α となるときの部分問題に対応する評価値を $g(i,\alpha)$ とする．$g(n+1,\alpha) = -\infty, \forall\alpha\in\{0,1\ldots,\Gamma\}$ とし，$i = n, n-1,\ldots,1$, $\alpha = 0,1,\ldots,\Gamma$ に対して，$g(i,\alpha)$ における漸化式を以下のように示す:

$$g(i,\alpha) = \begin{cases} \min\limits_{j=i+1}^{n+1}\ \max\left\{\max\limits_{k=i}^{j-1}\{\bar{p}_k\} - d_i,\ \max\limits_{k=i}^{j-1}\{\bar{p}_k\} + g(j,0)\right\} & \text{if } \alpha = 0 \\ \min\limits_{j=i+1}^{n+1}\ \max\left\{\max\limits_{k=i}^{j-1}\{\bar{p}_k+\delta_k\} - d_i,\ \max\limits_{k=i}^{j-1}\{\bar{p}_k+\delta_k\} + g(j,\alpha-1),\ \max\limits_{k=i}^{j-1}\{\bar{p}_k\} + g(j,\alpha)\right\} & \text{otherwise.} \end{cases}$$

P-RBP に対する動的計画法に関して以下の理論成果を与える：

補題 2. 値 $g(1,\Gamma)$ は P-RBP の最適値の下界であり，バックトラック操作で得られる $g(1,\Gamma)$ に対応する解 $\bar{\varphi}$ は P-RBP の実行可能解でり，評価値 $\max\limits_{p\in P} L^{\mathrm{p}}(p,\bar{\varphi})$ は，P-RBP の最適値の上界である．

補題 3. バッチサイズ順列 φ が与えられるとき，問題 $\max\limits_{p\in P} L^{\mathrm{p}}(p,\varphi)$ は，$|\varphi| \le \Gamma$ のとき線形時間，そうでないとき $\mathcal{O}(n+\Gamma|\varphi|)$ 時間で厳密に解ける．

定理 2. P-RBP に対する動的計画法を用いて，$\mathcal{O}(n^2\Gamma)$ 時間で P-RBP の最適値の上下界を得ることができる．

5. P-RBP に対する計算実験

納期と処理時間の相関のある乱数問題例を各 $n\in\{25,50,100,200,400\}$ に対して，100 個生成した．計算実験の結果を表 1 に示す．行「%opt」に定理 2 で示した上下界が一致する問題例の割合を示す．提案手法は，すべての n に対して 8 割以上の確率で最適解を得ることができた．

表 1: 100 問中最適解を得た数

n	25	50	100	200	400
%opt	85%	88%	90%	83%	85%

参考文献

[1] Scott Webster and Kenneth R Baker. Scheduling groups of jobs on a single machine. *Operations research*, Vol. 43, No. 4, pp. 692–703, 1995.

[2] Peter Brucker, Andrei Gladky, Han Hoogeveen, Mikhail Y Kovalyov, Chris N Potts, Thomas Tautenhahn, and Steef L Van De Velde. Scheduling a batching machine. *Journal of scheduling*, Vol. 1, No. 1, pp. 31–54, 1998.

[3] Albert Peter Marie Wagelmans and Alex E Gerodimos. Improved dynamic programs for some batching problems involving the maximum lateness criterion. *Operations Research Letters*, Vol. 27, No. 3, pp. 109–118, 2000.