日本オペレーションズ・リサーチ学会
2022年 春季研究発表会

最小費用全域木ゲームにおける最小コア

(申請中)　東京工業大学　*金子昂大　KANEKO Kodai
01605000　東京工業大学　松井知己　MATSUI Tomomi

1.　はじめに

最小費用全域木ゲームでは複数のエージェントと一つのソースが存在し, 各エージェントがソースへの供給路の構築を試みる状況を議論する．供給路はエージェントとソースを頂点とするグラフで表され, 頂点間の枝には費用が割り当てられている．この状況に対して各エージェントは, 自身が支払う費用を可能な限り小さくすることを目標とする．Bird [1] は最小費用全域木問題に対する費用分配方法を, 協力ゲーム理論の解概念に関連づけた．エージェントは, 与えられたグラフと費用に対する最小費用全域木 (以下, 最小木と略記する) を協力して構築し, その後最小木の費用をエージェント間で分配する．最小木の構築は Prim [2] が多項式時間アルゴリズムを提案している．本研究では, 最小木の費用の分配方法として, 協力ゲーム理論での解概念であるコアや ϵ コア, 最小コアについての議論を行う．

最小木ゲームのコアは非空であり, コアの元となる準配分を多項式時間で構築できることが知られている [1]．準配分と ϵ が与えられた時に, 準配分が最小木ゲームの ϵ コアに入っていないことを判定する問題 (ϵ コア所属性判定問題, と呼ぶ) が NP 完全であることと [3], 最小木ゲームの最小コアの元を一つでも求める問題 (最小コアの求解, と呼ぶ) が NP 困難であること, も知られている [4]．本研究では, 最小木ゲームの性質を用いた ϵ コア所属性判定問題の混合整数計画としての定式化と, 前述の提案定式化を利用した最小コアの求解アルゴリズム, を提案する．また, 最小木ゲームにおいて, 0 コアが最小コアとなるための十分条件を導出する．

2.　準備

最小木ゲームを定義する．$N = \{1, 2, \ldots, n\}$ をエージェントの集合とする．0 をソースとする．N の部分集合 S に対し, $S_0 = S \cup \{0\}$ とする．頂点集合 N_0 に対する無向完全グラフを, $G_0 = (N_0, E)$ とする．また $G_0[S_0]$ を, S_0 によって誘導される G_0 の誘導部分グラフとする．$C : E \to \mathbb{R}_+$ を各枝に非負の費用を与える関数とし, 頂点対 $\{i, j\}$ 間の枝の費用を C_{ij}（または C_{ji}）のように表す．関数 $c : 2^N \to \mathbb{R}_+$ は, $c(S)$ が $G_0[S_0]$ の最小木の費用関数と定める．(N, c) によって定められる特性関数ゲームを最小木ゲームと呼ぶ．

等式 $\sum_{i \in N} x_i = c(N)$ を満たすベクトル $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^N$ を準配分と呼ぶ．最小木ゲームにおける準配分は, 各エージェントが支払う費用を表す（負の値であることもあり得る．その場合は利益を得ることを表す)．任意の $S \subset N$ に対し, $\sum_{i \in S} x_i \leq c(S)$ を満たす準配分の集合をコア, $\sum_{i \in S} x_i \leq c(S) - \epsilon$ を満たす準配分の集合を ϵ コアと呼ぶ．また, 下記の最大化問題 P の最適値を, 議論している最小木ゲームの Least core value, ϵ を Least core value に固定したときの問題 P の実行可能解集合を, 最小コアと呼ぶ．

$$
\begin{aligned}
\mathrm{P} : \max.\quad & \epsilon \\
\text{s.t.}\quad & \sum_{i \in S} x_i \leq c(S) - \epsilon \ (\emptyset \neq \forall S \subset N), \quad (1)\\
& \sum_{i \in N} x_i = c(N).
\end{aligned}
$$

3.　ϵ コア所属性判定問題の定式化

本節では ϵ と $\boldsymbol{x}$ が与えられた状況で, $\boldsymbol{x}$ が ϵ コア中にあることを判定する問題について議論する．補題 3.1 より, 変数が S である最小化問題 Q を解くことで, ϵ コア所属性判定問題を解くことができる．

補題 3.1. ϵ と $\boldsymbol{x}$ が与えられたときに, $\boldsymbol{x}$ が ϵ コア中にあることの必要十分条件は, $\epsilon \leq$ (問題 Q の最適値), が成り立つことである．

$$
\mathrm{Q} : \min\{c(S) - \sum_{i \in S} x_i \mid \emptyset \neq \forall S \subset N\}.
$$

問題 Q の許容解 S の個数は $2^n - 2$ 個であるため, 混合 $0-1$ 整数計画問題 U として定式化を行う．これは, $0-1$ 変数 s_{ij} が $(n^2 + n)$ 個, 非負変数 f_{ij} が $(n^2 + n)$ 個, 制約式数が $(2n^2 + 4n + 3)$ 本

の定式化であり, MIP ソルバを使用して解くことができる.

$$\begin{aligned}
\mathrm{U: min.} \quad & \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=0}^{n} C_{ij}s_{ij} + \sum_{i=1}^{n} x_i(1-s_{ii}) \\
\mathrm{s.t.} \quad & \sum_{j=0}^{n} s_{ij} = 1 \ (\forall i \in N) \\
& \sum_{j=0}^{n} f_{ij} - \sum_{j=1}^{n} f_{ij} = 1 - s_{ii} \ (\forall i \in N), \\
& \sum_{j=1}^{n} f_{j0} + \sum_{i=1}^{n} s_{ii} = n, \\
& 1 \leq \sum_{i=1}^{n} s_{ii} \leq n-1, \\
& s_{ij} \leq f_{ij} \leq n s_{ij} \ (\forall (i,j) \in N \times N_0), \\
& f_{ij} \geq 0 \ (\forall (i,j) \in N \times N_0), \\
& s_{ij} = \{0,1\} \ (\forall (i,j) \in N \times N_0).
\end{aligned}$$

4. 最小コアの求解アルゴリズム

問題 P は制約式数が 2^n 本であるため, 問題 P の (1) の制約式を下記の $\sum_{i\in S} x_i \leq c(S) - \epsilon$ $(\emptyset \neq \forall S \in \mathcal{T})$ の制約式に変更した緩和問題 P($\mathcal{T}$) を用いて (集合 $\mathcal{T} \subseteq 2^N \backslash \{\emptyset, N\}$), 制約の逐次組込みを行うアルゴリズムを提案する.

提案アルゴリズム

Step 0 : 集合 $\{\{1\}, \ldots, \{n\}\}$ を $\mathcal{T}$ の初期値とする.
Step 1 : 問題 P($\mathcal{T}$) の最適値ϵ^*, 最適解 $\boldsymbol{x}^*$を求める.
Step 2 : $\boldsymbol{x}$ として $\boldsymbol{x}^*$が与えられた状況で問題 Q を解き, 最適値がϵ^*以上ならばϵ^*と $\boldsymbol{x}^*$を出力して終了する. 最適値がϵ^*未満ならば問題 Q の最適解となる集合 S を $\mathcal{T}$ に加え Step 1 に戻る.

また, 以下の定理を示した.

定理 4.1. G_0 と C が与えられたとき, ソースに接続する枝が 2 本以上の最小木が存在するならば, 最小木ゲーム (N, c) の Least core value は 0 である.

5. 計算機実験

定式化 U で問題 Q を解いた. また, 提案アルゴリズムで最小コアの求解を行った. MIP ソルバとして, CPLEX ソルバを使用している. 実行環境は, OS: Windows 11 Pro, プロセッサ: Intel(R) Core(TM) i5-8265U @1.60GHz 1.80GHz, メモリ 8GB, Python: 3.8.10, CPLEX: 20.1 である. 表 1, 表 2 の実験共に, 各エージェント数に対し 20 回ずつ実験を行い, 計算時間の平均を求めた. 表 2 の実験では平面上にランダムにエージェントを配置し, エージェントやソースの間のユークリッド距離を費用関数とした. また, ソースを平面の中心と端の 2 通りの位置に配置して, 実験を行った.

表 1: 定式化 U での問題 Q の計算

エージェント数（人）	計算時間の平均 (秒)
100	4.28
200	17.70
300	65.71
400	152.27
500	508.01

表 2: 提案アルゴリズムでの最小コアの求解

エージェント数（人）	中心にソース (秒)	端にソース (秒)
10	1.41	3.75
15	15.49	12.08
20	277.97	58.99
25	1035.15	140.11
30	2216.31	428.16

参考文献

[1] C.G. Bird, "On cost allocation for a spanning tree: a game theoretic approach," *Networks*, **6.4** (1976), 335-350.

[2] R.C. Prim, "Shortest connection networks and some generalizations," *The Bell System Technical Journal*, **36.6** (1957), 1389-1401.

[3] U. Faigle, et al, "On the complexity of testing membership in the core of min-cost spanning tree games," *International Journal of Game Theory*, **26.3** (1997), 361-366.

[4] U. Faigle, W. Kern, and D. Paulusma, "Note on the computational complexity of least core concepts for min-cost spanning tree games," *Mathematical methods of operations research*, **52.1** (2000), 23-28.