日本オペレーションズ・リサーチ学会
2022年 春季研究発表会

Change-making problem に関する特徴付けとその一般化

申請中　東京農工大学　鈴木悠馬　SUZUKI Yuma
01606760　東京農工大学　*宮代隆平　MIYASHIRO Ryuhei

1. Change-making problem と貪欲法

Change-making problem とは，n 種類の額面の硬貨からなる硬貨体系 $C = (c_1, c_2, \ldots, c_n)$ (ただし各 c_i は正整数で $1 = c_1 < c_2 < \cdots < c_n$) において支払額 $v \in \mathbb{Z}_{>0}$ を支払う際に，使用する硬貨の総枚数を最小化する問題である．この問題は以下の整数計画問題として定式化することができる:

$$\begin{aligned} \underset{\boldsymbol{x}}{\text{minimize}} \quad & \sum_{i=1}^{n} x_i \\ \text{subject to} \quad & \sum_{i=1}^{n} c_i x_i = v, \\ & x_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \quad (i = 1, 2, \ldots, n), \end{aligned}$$

ここで x_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ は額面 c_i の硬貨を使う枚数を表す非負整数変数とする．

Change-making problem は NP 困難であることが知られている [3]．また，動的計画法に基づいた擬多項式時間アルゴリズムがいくつか提案されている．

Change-making problem に対して，表 1 の貪欲法を考える．この貪欲法は，額面の大きい硬貨から順に，支払額の残りをその硬貨で可能な限り支払うという操作を繰り返すものである．もちろん一般には，この貪欲法は最適解を返さない．例えば硬貨体系 $C = (1, 3, 4)$ で支払額 $v = 6$ を支払う場合には，最適解は 2 枚の硬貨 $(6 = 3 + 3)$ からなるが，貪欲法は硬貨 3 枚の解 $(6 = 4 + 1 + 1)$ を出力する．しかしながら，現実のほとんどの硬貨体系においては任意の支払額に対して貪欲法が最適解を返すことから，このような良い性質を持つ硬貨体系の特徴について研究がなされてきた．

与えられた硬貨体系に対し，貪欲法が最適解を返さない支払額のことをその硬貨体系に対する**反例**と言う．反例が存在しない，つまり任意の支払額に対して貪欲法が最適解を返す硬貨体系を **canonical** な硬貨体系，反例が存在する硬貨体系を **noncanonical** な硬貨体系と呼ぶ．

n 種類の硬貨からなる硬貨体系において，硬貨体系が canonical かどうかは $O(n^3)$ で判定可能なことが知られている [5]．一方で canonical な硬貨体系の特徴付けは，$n \leq 6$ の場合にのみ先行研究によって与えられていた．

表 1: Change-making problem に対する貪欲法

Input v and $C = (c_1, c_2, \ldots, c_n)$.
Set $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) := (0, 0, \ldots, 0)$.
For $i := n$ **downto** 1 **do**:
　While $c_i \leq v$ **do**:
　　$v := v - c_i$ and $x_i := x_i + 1$.
Output $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

本研究では，特徴付けの一部について n を一般の場合に拡張し，その結果から $n = 5, 6$ における canonical な硬貨体系の特徴付けが改めて導けることを示す．

2. 特徴付けに関する先行研究

本節では，先行研究 [1–3, 6] によって得られている $n \leq 6$ における canonical な硬貨体系の特徴付けを記す．これ以降，硬貨体系 $C = (c_1, c_2, \ldots, c_n)$ について，C の先頭 $n-1$ 個の硬貨からなる硬貨体系 $(c_1, c_2, \ldots, c_{n-1})$ を C' と表す．また C において，支払額 v に対して貪欲法が与える解の硬貨の総枚数を $\mathrm{grd}_C(v)$ と表記する．

$n = 1$ の硬貨体系，$n = 2$ の任意の硬貨体系は明らかに canonical である．

定理 1 (Kozen and Zaks [3])**.** 硬貨体系 $C = (1, c_2, c_3)$ が canonical である必要十分条件は，$q = \lfloor c_3/c_2 \rfloor$, $r = c_3 \bmod c_2$ としたときに $r = 0$ または $c_2 \leq q + r$ となることである．

定理 2 (Adamaszek and Adamaszek [1], Cai [2])**.** 硬貨体系 $C = (1, c_2, c_3, c_4)$ が canonical である必要十分条件は，硬貨体系 C' が canonical かつ $m = \lceil c_4/c_3 \rceil$ に対して $\mathrm{grd}_C(mc_3) \leq m$ となることである．

定理 3 (Adamaszek and Adamaszek [1], Cai [2])**.** 硬貨体系 $C = (1, c_2, c_3, c_4, c_5)$ が canonical である必要十分条件は，以下 (a)(b) のいずれかを満たすことである:

(a) 硬貨体系 C' が canonical かつ $m = \lceil c_5/c_4 \rceil$ に対して $\mathrm{grd}_C(mc_4) \leq m$;
(b) $C = (1, 2, c_3, c_3 + 1, 2c_3)$ かつ $c_3 > 3$.

定理 4 (Suzuki and Miyashiro [6])**.** 硬貨体系 $C = (1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6)$ が canonical である必要十分条件は，以下 (a)(b) のいずれかを満たすことである:

(a) 硬貨体系 C' が canonical かつ $m = \lceil c_6/c_5 \rceil$ に対して $\mathrm{grd}_C(mc_5) \le m$;

(b) C' が noncanonical かつ $\ell = \lceil c_5/c_3 \rceil$ に対して C が以下 (i)(ii)(iii) のいずれかを満たす:

(i) $C = (1, 2, 3, c_4, c_4 + 1, 2c_4)$ かつ $c_4 > 4$;

(ii) $C = (1, c_2, 2c_2 - 1, c_4, c_2 + c_4 - 1, 2c_4 - 1)$, $c_4 \ge 3c_2 - 1$ および $\mathrm{grd}_C(\ell c_3) \le \ell$;

(iii) $C = (1, c_2, 2c_2, c_4, c_2 + c_4, 2c_4)$, $c_4 \ge 3c_2 - 1$, $c_4 \ne 3c_2$ および $\mathrm{grd}_C(\ell c_3) \le \ell$.

また，canonical な硬貨体系の特徴付けの一般化に関して，以下の定理が知られている．

定理 5 (Magazine, Nemhauser, and Trotter Jr. [4])**.** $n \ge 2$ とする．硬貨体系 $C = (1, c_2, \ldots, c_n)$ に対し，硬貨体系 C' が canonical であるとする．このとき，以下の (a)(b) は等価である:

(a) C は canonical;

(b) $m = \lceil c_n/c_{n-1} \rceil$ に対して $\mathrm{grd}_C(mc_{n-1}) \le m$.

定理 5 は，硬貨体系 C' が canonical な場合に硬貨体系 C が canonical であることの特徴付けを n を一般化した形で与えており，強力な定理である (定理 3(a) および定理 4(a) は定理 5 から導かれる)．しかし，C' が noncanonical である場合に C が canonical であることの特徴付けについては，これまでに定理 5 のような一般化は与えられていなかった．

3. 特徴付けの一般化

本研究では，硬貨体系 C' が noncanonical な場合に硬貨体系 C が canonical であることの特徴付けについて，n を一般化した以下の定理を得た．先行研究によって，$C = (1, c_2, \ldots, c_n)$ が canonical かつ C' が noncanonical ならば，$n \ge 5$ かつ c_n は $2c_{n-1} - c_2$, $2c_{n-1} - c_3$, $\ldots$, $2c_{n-1} - c_{n-2}$ のいずれかに等しいという事実が知られている．定理 6 と定理 7 は，これら $n - 3$ 通りのうちの二通りに対して一般化を与えたものである．

定理 6. $n \ge 5$ とする．$c_n = 2c_{n-1} - c_2$ を満たす硬貨体系 $C = (1, c_2, \ldots, c_n)$ に対し，硬貨体系 C' が noncanonical であるとする．このとき，以下の (a)(b) は等価である:

(a) C は canonical;

(b) $C = (1, 2, \ldots, n - 3, c_{n-2}, c_{n-2} + 1, 2c_{n-2})$ かつ $c_{n-2} > n - 2$.

定理 7. $n \ge 6$ とする．$c_n = 2c_{n-1} - c_3$ を満たす硬貨体系 $C = (1, c_2, \ldots, c_n)$ に対し，硬貨体系 C' が noncanonical であるとする．このとき，以下の (a)(b) は等価である:

(a) C は canonical;

(b) $\ell = \lceil c_{n-1}/c_{n-3} \rceil$ に対して C が以下 (i)(ii)(iii) のいずれかを満たす:

(i) $C = (1, 2, \ldots, n - 4, n - 2, n, 2n - 3)$ かつ $n \ge 7$;

(ii) $C = (1, c_2, 2c_2 - 1, \ldots, (n - 4)c_2 - (n - 5), c_{n-2}, c_2 + c_{n-2} - 1, 2c_{n-2} - 1)$, $c_{n-2} \ge (n - 3)c_2 - (n - 5)$ および $\mathrm{grd}_C(\ell c_3) \le \ell$;

(iii) $C = (1, c_2, 2c_2, \ldots, (n-4)c_2, c_{n-2}, c_2 + c_{n-2}, 2c_{n-2})$, $c_{n-2} \ge (n-3)c_2 - 1$, $c_{n-2} \ne (n-3)c_2$ および $\mathrm{grd}_C(\ell c_3) \le \ell$.

定理 6 で $n = 5$ とすると定理 3(b) が，$n = 6$ とすると定理 4(b) の (i) が直ちに示せ，定理 7 で $n = 6$ とすると定理 4(b) の (ii)(iii) が導ける．また既に筆者ら [6] によって，$c_n = 2c_{n-1} - c_4$ を満たす canonical な硬貨体系 $C = (1, c_2, \ldots, c_n)$ に対して硬貨体系 C' が noncanonical であるならば，$n > 6$ であることが証明されている．よって，既知の定理 5 と本研究で示した定理 6・定理 7 を併せ，$n = 5, 6$ の硬貨体系が canonical であるための特徴付けが改めて導出できたことになる．

参考文献

[1] A. Adamaszek and M. Adamaszek: Combinatorics of the change-making problem. *European Journal of Combinatorics*, **31** (2010), 47–63.

[2] X. Cai: Canonical coin systems for CHANGE-MAKING problems. *Proceedings of the 2009 Ninth International Conference on Hybrid Intelligent Systems*, Volume 1, 499–504.

[3] D. Kozen and S. Zaks: Optimal bounds for the change-making problem. *Theoretical Computer Science*, **123** (1994), 377–388.

[4] M. J. Magazine, G. L. Nemhauser, and L. E. Trotter Jr.: When the greedy solution solves a class of knapsack problems. *Operations Research*, **23** (1975), 207–217.

[5] D. Pearson: A polynomial-time algorithm for the change-making problem. *Operations Research Letters*, **33** (2005), 231–234.

[6] Y. Suzuki and R. Miyashiro: Characterization of canonical systems with six types of coins for the change-making problem. *arXiv*:2111.12392 (2021).