日本オペレーションズ・リサーチ学会
2022年 春季研究発表会

重みつきポピュラー有向木のアルゴリズム

05001484　筑波大学　*夏井慧　　NATSUI Kei
01309494　法政大学　 高澤兼二郎　TAKAZAWA Kenjiro

1.　はじめに

安定マッチングを一般化した概念に，ポピュラーマッチングがある．このポピュラーマッチングの概念を有向グラフにおける有向木に適用したものが**ポピュラー有向木**である．各頂点の選好順が半順序で与えられるときのポピュラー有向木を求めるアルゴリズムは Kavitha ら [1] が提案しており，アルゴリズムの正当性は重みつき有向木の双対性を用いて証明されている．本研究では Kavitha らが提案したポピュラー有向木を，各頂点に重みが付随した有向グラフにおける重みつきポピュラー有向木へと一般化する．各頂点での選好順が全擬順序で与えられ，重みがある条件を満たす場合に対し，ポピュラー有向木のアルゴリズム [1] を拡張した重みつきポピュラー有向木のアルゴリズムを提案する．

2.　重みつきポピュラー有向木の定義

有向グラフ $G = (V_G, E_G)$ において，各頂点 v は正整数の重み $w(v)$ を持つものとし，自身に入ってくる辺に対して全擬順序の選好順 $\precsim_v$ を持つとする．頂点 v に入ってくる辺 e, f に対し，v が e 以上に f を好むとき，$e \precsim_v f$ と書く．また，$e \precsim_v f$ と $e \succsim_v f$ が同時に成り立つとき，好みに差がないとして $e \sim_v f$ と表す．さらに，$e \precsim_v f$ であるが $e \sim_v f$ でないとき，$e \prec_v f$ と書き，辺 f は辺 e を支配するという．

有向グラフ G にダミー頂点 r と，各頂点 v に対して辺 (r, v) を追加する．辺 (r, v) は，v に入っていく辺の中で最も好まれない辺とする．また，$V = V_G \cup \{r\}, E = E_G \cup \{(r, u) : u \in V\}$ とし，$D = (V, E)$ とする．この r を根とする有向全域木を D の r-有向木とよぶ．2 つの r-有向木 A, A' について，整数 $\Delta(A, A')$ を

$$\Delta(A, A') = \sum_{v:A(v)\succ_v A'(v)} w(v) - \sum_{v:A'(v)\succ_v A(v)} w(v)$$

と定義し，$\Delta(A, A')$ が正ならば A は A' よりもポピュラーであると定義する．ある r-有向木 A について，A よりもポピュラーな r-有向木が存在しないとき，A を**ポピュラー有向木**と呼ぶ．

3.　重みつきポピュラー有向木の特徴づけ

有向グラフ D における r-有向木 A を任意にとる．辺 $e = (u, v) \in E$ のコストを

$$c_A(e) = \begin{cases} 0 & (e \succ_v A(v)), \\ w(v) & (e \sim_v A(v)), \\ 2w(v) & (e \prec_v A(v)) \end{cases}$$

と定義する．このとき，各辺 $e = (u, v) \in A$ に対し $c_A(e) = w(v)$ であるため，$c_A(A) = \sum_{e\in A} c_A(e) = w(V_G)$ が成り立つ．有向グラフ D の任意の r-有向木 A' について $c_A(A') = w(V_G) + \Delta(A, A')$ が成り立つため，次が導かれる．

命題 1. 有向グラフ D において，r-有向木 A がポピュラーであることと，A がコスト $c_A(e)$ に関する最小コスト r-有向木であることは等価である．

以下に，有向グラフ D の最小コスト r-有向木を求める線形計画問題 (LP1) とその双対問題 (LP2) を示す．

(LP1)

$$\begin{aligned} \text{min.} \quad & \sum_{e\in E} c_A(e) \cdot x(e) \\ \text{s.t.} \quad & \sum_{e\in\delta^-(X)} x(e) \geq 1 \quad \forall X \subseteq V_G, X \neq \emptyset, \\ & x(e) \geq 0 \quad \forall e \in E. \end{aligned}$$

(LP2)

$$\begin{aligned} \text{max.} \quad & \sum_{X\subseteq V_G, X\neq\emptyset} y(X) \\ \text{s.t.} \quad & \sum_{X:e\in\delta^-(X)} y(X) \leq c_A(e) \quad \forall e \in E, \\ & y(X) \geq 0 \quad \forall X \subseteq V_G, X \neq \emptyset. \end{aligned}$$

(LP2) の実行可能解 y に対し，y のサポートを $\mathcal{F}(y) := \{X \subseteq V_G : y(X) > 0\}$ と書く．このとき，サポート $\mathcal{F}(y)$ がラミナーであるような (LP2) の整数最適解 y^*_A が存在する．

命題 2. サポート $\mathcal{F}(y_A^*)$ がラミナーとなるような整数最適解 y_A^* と r-有向木 A に対し，以下の *1,2,3* はそれぞれ同値である．

1. A はポピュラー有向木である．
2. $\sum_{X \subseteq V_G} y_A^*(X) = w(V_G)$ である．
3. すべての $X \in \mathcal{F}(y_A^*)$ に対し $|A \cap \delta^-(X)| = 1$ であり，すべての $e = (u,v) \in A$ に対し $\sum_{X: e \in \delta^-(X)} y_A^*(X) = w(v)$ である．

命題2より，(LP2) の整数最適解 y_A^* によるポピュラー有向木の特徴づけと，そのサポート $\mathcal{F}(y_A^*)$ によるアルゴリズムの正当性の証明が可能になる．

4. 頂点重みの条件と安全辺

頂点集合 $X \subseteq V_G$ で誘導される E の部分集合を $E[X]$ と表す．頂点集合 $X \subseteq V_G$ に対し，次の条件を満たす辺 $(u,v) \in E[X]$ の集合を $S(X)$ と書き，$S(X)$ に属する辺を安全辺とよぶ [1]：

1. (u,v) は $E[X]$ の任意の辺に支配されない．
2. (u,v) は $t \notin X$ である任意の辺 (t,v) を支配する．

Kavitha ら [1] は，任意のポピュラー有向木 A と $X \subseteq V_G$ について，

$$A \cap E[X] \subseteq S(X) \tag{1}$$

が成り立つことを利用してアルゴリズムを構築した．しかし，頂点に重みが付随する場合，式 (1) は成り立たない．式 (1) を成り立たせるため，各頂点の重みに以下の条件を与える：

$$w(s) + w(t) > w(u) \quad (s,t,u \in V_G). \tag{2}$$

この条件より，各頂点に重みが付随した場合においても，任意のポピュラー有向木 A と $X \subseteq V_G$ について式 (1) が成り立つことが導ける．

5. 重みつきポピュラー有向木アルゴリズム

以下に重みつきポピュラー有向木を求めるアルゴリズムを示す.

1. 各 $v \in V_G$ に対し，以下を実行する．
   - $X_v^0 = V_G, i = 0$ とする．
   - グラフ $D_v^i = (X_v^i, S(X_v^i))$ において，v からすべての頂点に到達可能になるまで，次の操作を繰り返す:

     X_v^{i+1} =(v から到達可能な D_v^i の頂点集合)，$i = i+1$ とする．
   - $X_v = X_v^i$，$D_v = D_v^i$ とする．
2. $\mathcal{X} = \{X_v : v \in V_G\}, \mathcal{X}' = \{X_v \in \mathcal{X} : X_v$ は $\mathcal{X}$ の中で極大$\}$ とし，グラフ $G' = (\mathcal{X}', E')$ を $E' = \emptyset$ で定める．
3. 各 $X_v \in \mathcal{X}'$ に対し，D_v の強連結成分の中で，$S(X)$ の辺が入っていかないものを $\bar{X}_v$ とする．各 $\bar{X}_v$ に対し，以下を実行する．
   - $\bar{X}_v$ の中で最小重みの頂点 $v' \in \bar{X}_v$ すべてが，以下の条件を満たすならば，STEP5 へ．

     次の (a)–(c) を満たすような頂点 $s \in X_v \setminus \bar{X}_v$ と辺 $f \in (E[X_v] \setminus S(X_v)) \cap \delta^-(v')$ が存在する．
     (a) $w(s) < w(v')$,
     (b) v' は s から $S(X_v) \cup \{f\}$ の辺を用いて到達可能である．
     (c) すべての辺 $e \in \delta^-(v') \cup \delta^-(X_v)$ に対し，$f \succ_{v'} e$ が成り立つ．
   - そうでなければ，$\bar{X}_v$ の中で最小重みの頂点 $v' \in \bar{X}_v$ すべてに対して，以下を実行する．
     – すべての $u \notin X_v$ に対して，$e = (u, v')$ が $\delta^-(X_v)$ の辺に支配されないならば，

     $$e' = \begin{cases} (U, X_v) & (u \in U, U \in \mathcal{X}'), \\ (r, X_v) & (u = r), \end{cases}$$

     として，$E' := E' \cup \{e'\}$ とする．
4. もし $D' = (\mathcal{X}' \cup \{r\}, E')$ が r-有向木 A' を含むならば，以下を実行する．
   - $\tilde{A} = \{e : e' \in A'\}$ とする．
   - $R = \{v \in V_G : |X_v| \geq 2,\ \delta^-(v) \cap \tilde{A} \neq \emptyset\}$ とする．
   - 各 $v \in R$ に対し，A_v を部分グラフ $(X_v, S(X_v))$ の中の v-有向木とする．
   - $A^* = \tilde{A} \cup \bigcup_{v \in R} A_v$ を出力して終了する．
5. 「D のポピュラー有向木は存在しない」と出力して終了する．

参考文献

[1] Kavitha, T., Király, T., Matuschke, J., Schlotter, I., Schmidt-Kraepelin, U.: Popular branchings and their dual certificates, Mathematical Programming, to appear.