日本オペレーションズ・リサーチ学会
2022年 春季研究発表会

木の最小シュタイナー支配集合

申請中　電気通信大学　古舘周平　FURUDATE Shuhei
01605610　電気通信大学　村松正和　MURAMATSU Masakazu

1. はじめに

頂点集合 V, 辺集合 E からなるグラフ $G = (V, E)$ において頂点の部分集合 W の閉近傍 $N[W] = \{v \in V : v \in W \text{ or } \exists w \in W, (w, v) \in E\}$ が V であるとき, W を G の支配集合と呼び，支配集合のうち, 頂点数が最小のものを最小支配集合と呼ぶ．その頂点数を支配数と呼び $\gamma(G)$ で表す．支配集合に関する先行研究の一つとして木における支配数を求める線形アルゴリズムが提案されている [1].

頂点の部分集合 W が与えられたとき, W を含む頂点数最小の部分木を W のシュタイナー木と呼ぶ．W のシュタイナー木少なくとも 1 つに含まれる頂点の集合 $S(W)$ に対し, $S(W) = V$ が成り立つとき, W を G のシュタイナー集合と呼ぶ．シュタイナー集合のうち、頂点数が最小のものを最小シュタイナー集合, その頂点数をシュタイナー数と呼ぶ [2].

W が支配集合であり，かつシュタイナー集合であるとき W をシュタイナー支配集合と呼ぶ．シュタイナー支配集合のうち、頂点数が最小のものを最小シュタイナー支配集合と呼ぶ．その頂点数をシュタイナー支配数と呼び $\gamma_{st}(G)$ と表す [3].

本研究では先行研究 [4] で述べられている木における最小シュタイナー支配集合に関する定理が成り立たない場合があることを示し，成り立つために必要な条件を加えた場合の定理を示す.

2. 先行研究

木 T に対して $L(T)$ を T の葉集合とする．先行研究 [4] では木における最小シュタイナー支配集合に関して以下の定理が示されている.

Theorem 2.4 of [4]: 木 $T = (V, E)$ において, H を頂点集合 $V - N[L(T)]$ から導かれる T の誘導部分グラフとする．このとき

$$\gamma_{st}(T) = |L(T)| + \gamma(H)$$

が成り立つ.

次の例はこの定理が成り立たない場合を示している.

例 1: 図 1 の木 T を考える．$L(T)$ と H の最小支配集合の一つをバツ印で記す．図 1 のバツ印のノードの集合はシュタイナー支配集合であることはすぐに確認できる．したがって定理 2.4 が正しいのであればこれが最小シュタイナー支配集合であり, その頂点数は $|L(T)| + \gamma(H) = 5$ である.

しかし, この木には 5 よりも頂点数の少ないシュタイナー支配集合が存在する．図 2 にその様なシュタイナー支配集合をバツ印で記す．図 2 のバツ印のノードの集合もシュタイナー支配集合であることはすぐに確認でき，その頂点数は 4 である.

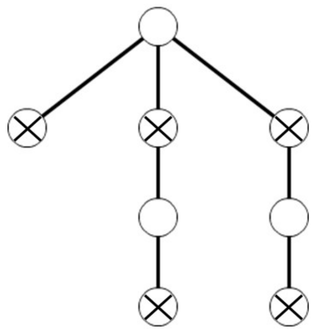

図 1: T における $L(T)$ と H の最小支配集合

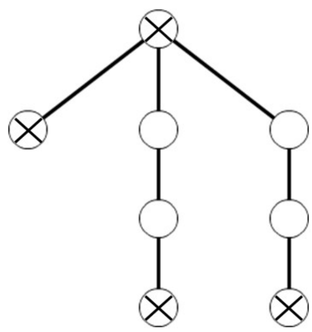

図 2: T の最小シュタイナー支配集合

3. 木における最小シュタイナー支配集合

3.1. シュタイナー集合に関する補題・系

頂点 $v \in V$ の閉近傍が完全グラフのとき, v を極点と呼ぶ. シュタイナー集合と極点に関して以下の補題が知られている.

Lemma 2.1 of [2]: *グラフ G における任意のシュタイナー集合を S とすると*

$$v \text{ が極点} \Rightarrow v \in S$$

が成り立つ.

木において極点の集合とは葉集合を指す. 従って補題 2.1 より木 T におけるシュタイナー集合に関して以下の系が言える.

Corollary 2.2 of [2]: *$L(T)$ は T の任意のシュタイナー集合に含まれ, かつ T の最小シュタイナー集合である.*

3.2. 木における最小シュタイナー支配集合

本節では木 $T(V,E)$ における最小シュタイナー支配集合に関する定理を示す.

定理 1 *H が連結であるとき, 木における最小シュタイナー支配集合に関して以下が成り立つ:*

$$\gamma_{st}(T) = |L(T)| + \gamma(H).$$

証明 H の最小支配集合の一つを D とする. 系 2.2 より, $L(T)$ を含む任意の集合は T のシュタイナー集合である. $v \in N[L(T)]$ のとき v は $L(T)$ によって支配されている. $v \notin N[L(T)]$ のとき v は D によって支配されている. 従って $L(T) \cup D$ は T のシュタイナー支配集合であり,

$$\gamma_{st}(T) \leq |L(T) \cup D| = |L(T)| + \gamma(H)$$

が成り立つ.

$\gamma_{st}(T) < |L(T)| + \gamma(H)$ であると仮定する. 最小シュタイナー支配集合として $V - N[L(T)]$ の頂点数が最大のものを一つとり S とおく. S において $|S| = \gamma_{st}(T) < |L(T)| + \gamma(H)$ である. 系 2.2 より $L(T) \subseteq S$ である. ここで, $S' = S - L(T)$ とおく. 仮定より $|S'| < \gamma(H)$ となるので S' は H の支配集合ではない. 従って

$$\exists a \in V - N[L(T)], \forall s \in S', a \notin N[\{s\}]$$

が成り立つ. この a はある $b \in S \cap N[L(T)]$ によって支配されている. ただし, a 自身は $N[L(T)]$ には属していないので, $b \notin L(T)$ である. このとき b は H の点とは a としか隣接していない. なぜなら, もし a 以外の点 $c \in V - N[L(T)]$ があり, $(b,c) \in E$ であるとすれば, H が連結であることから a, b, c を含む閉路が存在して, T が木であることに矛盾する. すると, $(S - \{b\}) \cup \{a\}$ は最小シュタイナー支配集合であり, S よりも $V - N[L(T)]$ の頂点が一つ多い. これは S の取り方に矛盾している.

以上より

$$\gamma_{st}(T) = |L(T)| + \gamma(H)$$

が示された.

4. おわりに

本研究では最小シュタイナー支配集合に関する先行研究で示されている定理に関して成り立たない例を示し, 成り立つための条件を加えた正しい定理を示した.

今後の課題としては H が非連結な場合に関する考察を深め, 連結な場合だけでなく非連結な場合にも対応した定理とアルゴリズムを提案することが挙げられる.

参考文献

[1] E. J. Cockayne, S. E. Goodman and S. T. Hedetniemi, *A linear algorithm for the domination number of a tree*, Information Processing Letter, 4(1975)41–44.

[2] G.Chartrand and P.Zhang. *The Steiner Number of a Graph*, Discrete Mathematics, 242 (2002)41–54.

[3] J. John, G. Edwin and P. Arul Paul Sudhahar, *The Steiner Domination Number of a Graph*, International Journal of Mathematics and Computer Application Research, 3(2013)37–42.

[4] Y. Shen, C. Zhao, C. Gao and Y. Tang, *A linear algorithm on Steiner domination of trees*, 2020 IEEE the 3rd International Conference of Safe Production and Information (IICSPI), (2020)99–102.