日本オペレーションズ・リサーチ学会
2022年 春季研究発表会

集合値多目的最短経路問題における二項演算に対する解の安定性

01110072　弘前大学　*金正道　KON Masamichi

1.　はじめに

本稿では、有向グラフにおいて、ある頂点から他のすべての頂点への非劣経路を求める問題を考える。各辺の長さは各成分が最小値と最大値が存在する実数の集合であるベクトルとして与えられている。異なる 2 頂点間の経路の長さは経由する辺の長さの可換, 結合的かつ単調な二項演算によって定義される。非劣経路はスカラー化問題にダイクストラ法を適用することによって求めることができる。このとき、パラメータを含む二項演算に対して、パラメータが変化したときの非劣経路およびその長さの変化について数値実験により考察する。

2.　集合値多目的最短経路問題

2.1.　二項演算と順序

$L \subset \mathbb{R}$, $L \neq \emptyset$ とし、$\mathcal{K} = \{A \subset L : \min A,\ \max A$ が存在する$\}$ とする。また、各 $A \in \mathcal{K}$ に対して、$A^L = \min A$, $A^R = \max A$ とする。

まず、$L, L^n, \mathcal{K}, \mathcal{K}^n$ 上の二項演算を導入する。$\bullet : L \times L \to L$ を L 上の二項演算とし、任意の $x, y, z \in L$ に対して次の条件 (i)–(iv) がみたされていると仮定する。

(i) $x \bullet y = y \bullet x$（可換性）

(ii) $x \bullet (y \bullet z) = (x \bullet y) \bullet z$（結合性）

(iii) $y < z \ \Rightarrow\ y \bullet x < z \bullet x$（狭義単調性）

(iv) $x \leq x \bullet y,\ x \leq y \bullet x$（両単調性）

例えば、$L = [0, 1)$ 上の二項演算 Aczél-Alsina, Dombi, Frank および Hamacher t-コノルム（定義は後述, 詳細は Klement et al. [2] 参照）は上記条件 (i)–(iv) をみたす。

L^n 上の二項演算 $\bullet : L^n \times L^n \to L^n$ を各 $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in L^n$ および $\boldsymbol{y} = (y_1, y_2, \cdots, y_n) \in L^n$ に対して、$\boldsymbol{x} \bullet \boldsymbol{y} = (x_1 \bullet y_1, x_2 \bullet y_2, \cdots, x_n \bullet y_n)$ とする。$\mathcal{K}$ 上の二項演算 $\circ : \mathcal{K} \times \mathcal{K} \to \mathcal{K}$ を各 $A, B \in \mathcal{K}$ に対して、$A \circ B = \{x \bullet y : x \in A,\ y \in B\}$ とする。このとき、$A, B \in \mathcal{K}$ に対して $(A \circ B)^L = A^L \bullet B^L$, $(A \circ B)^R = A^R \bullet B^R$ となる。$\mathcal{K}^n$ 上の二項演算 $\circ : \mathcal{K}^n \times \mathcal{K}^n \to \mathcal{K}^n$ を各 $\boldsymbol{A} = (A_1, A_2, \cdots, A_n) \in \mathcal{K}^n$ および $\boldsymbol{B} = (B_1, B_2, \cdots, B_n) \in \mathcal{K}^n$ に対して、$\boldsymbol{A} \circ \boldsymbol{B} = (A_1 \circ B_1, A_2 \circ B_2, \cdots, A_n \circ B_n)$ とする。

次に、$\mathcal{K}$ および $\mathcal{K}^n$ 上の擬順序（反射的, 推移的）および狭義半順序（非反射的, 推移的）を導入する。$A, B \in \mathcal{K}$ に対して

$$A \preceq B \ \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow}\ A^L \leq B^L,\ A^R \leq B^R$$
$$A \prec B \ \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow}\ A \preceq B,\ A \not\succeq B$$

とする。このとき、$\preceq$ は $\mathcal{K}$ 上の擬順序になり、$\prec$ は $\mathcal{K}$ 上の狭義半順序になる。$\boldsymbol{A} = (A_1,\ A_2, \cdots, A_n) \in \mathcal{K}^n$ および $\boldsymbol{B} = (B_1, B_2, \cdots, B_n) \in \mathcal{K}^n$ に対して

$$\boldsymbol{A} \preceq \boldsymbol{B} \ \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow}\ A_i \preceq B_i,\ i = 1, 2, \cdots, n$$
$$\boldsymbol{A} \prec \boldsymbol{B} \ \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow}\ \boldsymbol{A} \preceq \boldsymbol{B},\ \boldsymbol{A} \not\succeq \boldsymbol{B}$$

とする。このとき、$\preceq$ は $\mathcal{K}^n$ 上の擬順序になり、$\prec$ は $\mathcal{K}^n$ 上の狭義半順序になる。

2.2.　定式化

$G = (V, E)$ をグラフとする。ここで、$V = \{1, 2, \cdots, m\}$ は頂点の集合であり、$E \subset (V \times V) \setminus \{(i, i) : i \in V\}$ は辺の集合である。各辺 $(i, j) \in E$ は長さ $\boldsymbol{A}_{ij} \in \mathcal{K}^n$ をもつとする。2 つ以上の頂点の列 $P = (s, i, j, \cdots, k, t)$ で $(s, i) \in E$, $(i, j) \in E$, $\cdots$, $(k, t) \in E$ をみたすものを s から t への**経路**といい、$\boldsymbol{A}_{si} \circ \boldsymbol{A}_{ij} \circ \cdots \circ \boldsymbol{A}_{kt}$ を P の長さと定義する。

$s, t \in V$, $s \neq t$ とし、$\mathcal{P}_{st}$ を s から t へのすべての経路の集合とし、$P^* \in \mathcal{P}_{st}$ とする。また、各 $P \in \mathcal{P}_{st}$ に対して、$\ell(P)$ を P の長さとする。P^* が s から t への**最短経路**であるとは、任意の $P \in \mathcal{P}_{st}$ に対して $\ell(P^*) \preceq \ell(P)$ となるときをいう。P^* が s から t への**非劣経路**であるとは、$P \in \mathcal{P}_{st}$, $\ell(P) \preceq \ell(P^*)$ ならば $\ell(P) \succeq \ell(P^*)$ となるときをいう。非劣経路は必ず存在する。

ある頂点 $s \in V$ から他の頂点 $t \in V$ への最短経路または非劣最短経路を求める問題を**集合値多目的最短経路問題**という。

3.　ダイクストラ法

本節では、各辺 $(i, j) \in E$ が長さ $a_{ij} \in L$ をもつとし、各経路 $P = (s, i, j, \cdots, k, t)$ の長さは $a_{si} \bullet a_{ij} \bullet \cdots \bullet a_{kt}$ と定義されているとし、最短経路問題を考える。以下で述べるダイクストラ法（Dijkstra [1]）は、ある頂点 $s \in V$ から他のすべての頂点への最短経路を求める。

ダイクストラ法

(0) $S := \{s\}, \overline{S} := V \setminus \{s\}$ とし、各 $i \in V \setminus \{s\}$ に対して

$$\begin{aligned} d(i) &:= \begin{cases} a_{si} & \text{if } (s,i) \in E \\ \infty & \text{if } (s,i) \notin E \end{cases} \\ p(i) &:= s \quad \text{if } (s,i) \in E \end{aligned}$$

とする。

(1) $S = V$ ならば終了。そうでなかったら

$$d(v) = \min\{d(i) : i \in \overline{S}\}$$

となる頂点 $v \in \overline{S}$ を選ぶ。

(2) $S := S \cup \{v\}, \overline{S} := \overline{S} \setminus \{v\}$ とし、$(v,j) \in E$, $j \in \overline{S}$ であるすべての辺 (v,j) に対して

$$d(j) > d(v) \bullet a_{vj} \text{ならば} d(j) := d(v) \bullet a_{vj}, p(j) := v$$

とする。ステップ **(1)** に戻る。

4. 集合値多目的最短経路問題のスカラー化

$\psi : \mathcal{K} \to L$ を各 $A \in \mathcal{K}$ に対して $\psi(A) = A^L \bullet A^R$ と定義し、ψ を $\mathcal{K}$ に対する**スカラー化関数**とよぶ。任意の $x, y \in \psi(\mathcal{K})$ および $x = \psi(A)$, $y = \psi(B)$ となる任意の $A, B \in \mathcal{K}$ に対して $x \bullet y = \psi(A \circ B)$ となる。よって、任意の有限個の $A, B, \cdots, C \in \mathcal{K}$ に対して $\psi(A) \bullet \psi(B) \bullet \cdots \bullet \psi(C) = \psi(A \circ B \circ \cdots \circ C)$ となる。$\boldsymbol{\psi} : \mathcal{K}^n \to L^n$ を各 $\boldsymbol{A} = (A_1, A_2, \cdots, A_n) \in \mathcal{K}^n$ に対して $\boldsymbol{\psi}(\boldsymbol{A}) = (\psi(A_1), \psi(A_2), \cdots, \psi(A_n))$ と定義する。このとき、任意の有限個の $\boldsymbol{A} = (A_1, A_2, \cdots, A_n) \in \mathcal{K}^n$, $\boldsymbol{B} = (B_1, B_2, \cdots, B_n) \in \mathcal{K}^n$, $\cdots$, $\boldsymbol{C} = (C_1, C_2, \cdots, C_n) \in \mathcal{K}^n$ に対して $\boldsymbol{\psi}(\boldsymbol{A} \circ \boldsymbol{B} \circ \cdots \circ \boldsymbol{C}) = \boldsymbol{\psi}(\boldsymbol{A}) \bullet \boldsymbol{\psi}(\boldsymbol{B}) \bullet \cdots \bullet \boldsymbol{\psi}(\boldsymbol{C})$ となる。$f : L^n \to L$ を各 $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in L^n$ に対して $f(\boldsymbol{x}) = x_1 \bullet x_2 \bullet \cdots \bullet x_n$ と定義し、f を L^n に対する**スカラー化関数**とよぶ。このとき、任意の有限個の $\boldsymbol{A} = (A_1, A_2, \cdots, A_n) \in \mathcal{K}^n$, $\boldsymbol{B} = (B_1, B_2, \cdots, B_n) \in \mathcal{K}^n$, $\cdots$, $\boldsymbol{C} = (C_1, C_2, \cdots, C_n) \in \mathcal{K}^n$ に対して $f(\boldsymbol{\psi}(\boldsymbol{A} \circ \boldsymbol{B} \circ \cdots \circ \boldsymbol{C})) = f(\boldsymbol{\psi}(\boldsymbol{A})) \bullet f(\boldsymbol{\psi}(\boldsymbol{B})) \bullet \cdots \bullet f(\boldsymbol{\psi}(\boldsymbol{C}))$ となる。また

$$\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B} \in \mathcal{K}^n,\ \boldsymbol{A} \prec \boldsymbol{B} \ \Rightarrow\ f(\boldsymbol{\psi}(\boldsymbol{A})) < f(\boldsymbol{\psi}(\boldsymbol{B}))$$

となる。

最短経路問題において、$\boldsymbol{A}_{ij} \in \mathcal{K}^n$, $(i,j) \in E$ および $\circ$ を $f(\boldsymbol{\psi}(\boldsymbol{A}_{ij})) \in L$, $(i,j) \in E$ および $\bullet$ で置き替えた最短経路問題を**スカラー最短経路問題**とよぶことにする。スカラー最短経路問題はダイクストラ法を適用することによって解くことができる。

定理 $s, t \in V, s \neq t$ とし、P^* をスカラー最短経路問題における s から t への最短経路とする。このとき、P^* はもとの最短経路問題における s から t への非劣最短経路になる。

5. 数値実験

以下の各数値実験において、$L = [0,1)$, $G = (V,E)$（頂点数は $m = 10$ とし、辺数が少ない場合, 多い場合および中間の場合を考える）および辺の長さ $\boldsymbol{A}_{ij} \in \mathcal{K}^n$, $(i,j) \in E$（$n = 2, 3$ の場合を考える）は固定されているとする。また以下で、$x, y \in [0,1)$ であり、$\lambda \in (0, \infty)$ はパラメータである。数値実験の結果は発表時に提示する。

Aczél-Alsina t-コノルム

$$x \bullet y = 1 - e^{-((-\log(1-x))^{\lambda} + (-\log(1-y))^{\lambda})^{\frac{1}{\lambda}}}$$

Dombi t-コノルム

$$x \bullet y = 1 - \frac{1}{1 + \left(\left(\frac{x}{1-x}\right)^{\lambda} + \left(\frac{y}{1-y}\right)^{\lambda}\right)^{\frac{1}{\lambda}}}$$

Frank t-コノルム

$$x \bullet y = \begin{cases} x + y - xy & \text{if } \lambda = 1 \\ 1 - \log_{\lambda}\left(1 + \frac{(\lambda^{1-x}-1)(\lambda^{1-y}-1)}{\lambda - 1}\right) & \\ & \text{if } \lambda \in (0,1) \cup (1,\infty) \end{cases}$$

Hamacher t-コノルム

$$x \bullet y = \frac{x + y + (\lambda - 2)xy}{1 + (\lambda - 1)xy}$$

6. おわりに

本稿では、集合値多目的最短経路問題を扱った。そして、パラメータを含む二項演算に対して、パラメータが変化したときの非劣経路およびその長さの変化について数値実験により考察した。その結果、得られる非劣経路はときどき不安定になるが、ある程度安定していることが示された。

参考文献

[1] E. W. Dijkstra, A note on two problems in connexion with graphs, Numerische Mathematik, Vol.1, 1959, pp.269–271

[2] E. P. Klement, R. Mesiar and E. Pap, Triangular norms, Kluwer Academic Publishers, 2000