

# 確率的合意形成アルゴリズムにより得られる合意結果の確率的性質

千葉大学 \*竹原健太 TAKEHARA Kenta

01207040 千葉大学 塩田茂雄 SHIODA Shigeo

## 1. はじめに

会議に見られる合意形成の過程を数理的に論じる研究は、古くから経営科学、統計、工学（特に情報通信）等の分野において広く行われてきた。以前、我々は、参加者が相互に意見を交わせる（参加者が完全グラフにより連結されている）状況においてブロードキャスト型アルゴリズムで合意形成を行った際の、合意結果の確率的な性質について考察した [1, 2]。本稿では、参加者が一般的な有向/無向グラフにより連結されている場合において、ブロードキャスト型を含む一般的な確率的合意形成アルゴリズムにより得られる合意結果の確率的な特性について考察する。

## 2. 確率的合意形成アルゴリズム

### 2.1. 定式化

$N$  人の参加者による合意形成過程を考察する（以下では、参加者をエージェントと呼ぶ）。エージェントは有向グラフにより連結されており、エージェントには 1 から  $N$  までの番号が振られている。各エージェントは実数で表現される意見を有する。各離散時刻 ( $t = 0, 1, \dots$ ) においてエージェント間で意見の送受信が行われ、その結果、各エージェントの意見は時間とともに変化する。時刻  $t$  におけるエージェント  $n$  の意見を  $x_n(t)$  により、また各エージェントの意見を要素に持つベクトルを  $\mathbf{x}(t) \stackrel{\text{def}}{=} (x_1(t), \dots, x_N(t))$  により表す。エージェントの意見の遷移は以下の式で表されるとする。

$$\mathbf{x}(t+1)^\top = Q^{(e_t)} \mathbf{x}(t)^\top. \quad (1)$$

ここで、 $Q^{(e_t)}$  は時刻  $t$  でのエージェントの意見の更新の仕方を表現する非負行列であり、以下では「意見更新行列」と呼ぶ。 $\top$  は転置を表す記号である。意見更新行列は  $K (\geq 1)$  個存在し、 $e_t$  は時刻  $t$  での意見更新行列の番号（集合  $\{1, \dots, K\}$  内のいずれか）を表す確率変数とする。意見更新行列の各行の要素の和はいずれも 1 であるとする。また、 $e_0, e_1, \dots$  は独立かつ同分布な確率変数列であるとする。 $e_t$  が  $k$  に等しい確率を  $p_k$  で表し ( $p_k = P(e_t = k)$ )、 $Q \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k=1}^N p_k Q^{(k)}$  を定めると、 $Q$  は以下を満たす。

$$E[\mathbf{x}(t+1)|\mathbf{x}(t)] = Q\mathbf{x}(t)^\top. \quad (2)$$

確率変数  $x_c$  が存在して確率 1 で以下が成り立つとき、合意が形成されるといい、 $x_c$  を合意結果という。

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{x}(t) = x_c \mathbf{1}.$$

ここで  $\mathbf{1}$  は要素が全て 1 の行ベクトルである。 $Q$  が既約であれば、合意が形成されることが文献 [2] で示されている<sup>1</sup>。

### 2.2. 確率的合意形成モデルの種類

#### 2.2.1. ブロードキャスト型合意形成

ブロードキャスト型合意形成は毎回確率的に（かつ独立に）選ばれたエージェントが隣接するエージェントに自分の意見をブロードキャストするモデルである。隣接するエージェントから意見を受信したエージェントは受信した意見と自分の意見との重み付け和を計算し、自分の意見と置き換える。エージェント  $k$  が意見をブロードキャストした場合の意見更新行列を  $Q^{(k)}$  とすると、 $Q^{(k)}$  の非対角成分  $q_{ij}^{(k)}$  は例えば以下のように表すことができる。

$$q_{ij}^{(k)} = \begin{cases} \frac{a_{ki} r_k}{\epsilon r_i + r_k}, & j = k \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}.$$

ここで  $r_i$  はエージェント  $i$  の影響の強さを表すパラメータ（影響度パラメータ）であり、非負の実数値をとる（他のエージェントに及ぼす影響が大きいほど、大きな値を取る）。 $a_{ij}$  は  $i$  から  $j$  に向かう有向リンクが存在する場合に 1、存在しない場合に 0 を取る変数、 $\epsilon$  はエージェント間の相互影響度を調整する非負の実数値をとるパラメータであり、 $\epsilon$  が大きいほど相互影響度は小さくなる。

#### 2.2.2. プル型合意形成

プル型合意形成は毎回確率的に（かつ独立に）選ばれたエージェントが隣接する全てのエージェントから意見を入手し、入手した意見に基づいて自分の意見を更新するモデルである。入手された側の意見更新はない。（したがって丁度ブロードキャスト型と逆の動きをする）。エージェント  $k$  が隣接するエージェントからの

<sup>1</sup>文献 [2] はブロードキャスト型合意形成を扱っているが、文献 [2] の証明は本稿で扱う一般的な確率的合意形成アルゴリズムに適用できる

意見を入力して更新する場合の意見更新行列を  $Q^{(k)}$  とすると、 $Q^{(k)}$  の非対角成分は例えば以下のように表すことができる。

$$q_{ij}^{(k)} = \begin{cases} \frac{a_{jk}r_j}{\epsilon r_k + \sum_{n=1, i \neq k}^N a_{nk}r_n}, & i = k \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

### 2.2.3. ゴシップ型合意形成

ゴシップ型合意形成は毎回確率的に（無向リンクで結ばれている）一組のエージェントが選ばれ、そのエージェント間でのみ意見の交換が行われる合意形成モデルである。意見更新行列  $Q^{(k)}$  が、エージェント  $k_1$  とエージェント  $k_2$  の間での意見交換による意見更新を表すこととすると、 $Q^{(k)}$  の非対角成分は  $q_{k_1 k_2}^{(k)}$  と  $q_{k_2 k_1}^{(k)}$  が以下で与えられ、それ以外は 0 である。

$$q_{k_1 k_2}^{(k)} = \frac{r_{k_2}}{\epsilon r_{k_1} + r_{k_2}}, \quad q_{k_2 k_1}^{(k)} = \frac{r_{k_1}}{r_{k_1} + \epsilon r_{k_2}}.$$

### 3. 初期意見が確率変数の場合

次にエージェントの初期意見  $x_1(0), \dots, x_N(0)$  が確率変数の場合を考察する。以下では、確率変数であることを示すため、初期意見を  $X_1(0), \dots, X_N(0)$  と大文字で記載する。  $X_1(0), \dots, X_N(0)$  は独立であり、また  $e_0, e_1, \dots$  とも独立であるとする。合意結果は  $X_c$  により表す。  $X_c$  は以下のように表される。

$$X_c = \sum_{n=1}^N A_n X_n(0), \quad t = 1, 2, \dots \quad (3)$$

ここで  $A_n$  は  $e_0, e_1, \dots$  に依存して決まる確率変数であり、 $\sum_{n=1}^N A_n = 1$  を満たす。

$X_1(0), \dots, X_N(0)$  はいずれも安定分布に従うとする。このとき、合意結果は必ずしも安定分布には従わない。しかし、初期意見がコーシー分布に従うならば、合意結果も初期意見と同一のコーシー分布（従って安定分布）に従うことを示すことができる。

## 4. 数値例

### 4.1. シミュレーション条件

$N = 10$  とし、エージェント  $i$  からエージェント  $j$  に向かう有向リンクは確率 0.3 で存在するとして、有向グラフを生成した。エージェントの初期意見はそれぞれ、安定分布である、標準正規分布、標準コーシー分布、位置パラメータ 0、尺度パラメータ 1 のレヴィ分布により定め、影響度パラメータ  $\{r_i\}_{i=1}^N$  は以下で定めた。

$$r_i = \max\{N(1, 0.2), 0\}.$$

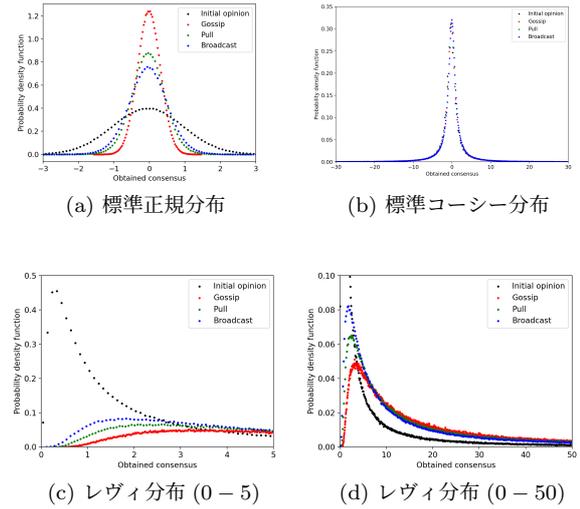


図 1: 初期意見が安定分布の場合

ここで  $N(1, 0.2)$  は平均 1、分散 0.2 のガウス分布に従う確率変数である。さらに、シミュレーション実験では  $\epsilon = 1$  とした。シミュレーションは 1,000,000 回ずつ行い、合意結果の分布を求める。

### 4.2. シミュレーション結果

合意が形成されるまでの時間は、ブロードキャスト型が最も早く、次にプル型、最も遅いのはゴシップ型になる。図 1(a) に初期意見が標準正規分布、図 1(b) に標準コーシー分布、図 1(c) にレヴィ分布で横軸が 0 から 5 の場合、図 1(d) にレヴィ分布で横軸が 0 から 50 に拡大した場合の結果を示す。(a) はゴシップ型、プル型、ブロードキャスト型の順に意見の分散が小さくなることが確認できる。(b) はどの合意形成でも結果が変わらないことが確認できる。初期意見がコーシー分布に従う場合、合意結果もコーシー分布に従うことは理論的に示すことができる。(c), (d) はゴシップ型、プル型、ブロードキャスト型の順に分布の幅が大きくなっている。この振る舞いは初期意見の分布が標準正規分布である場合と対照的である。

### 参考文献

- [1] 塩田茂雄, 加藤大: ブロードキャスト型合意形成における合意結果の確率特性, オペレーションズ・リサーチ, Vol. 66 (2021), 591–599.
- [2] Katoh, D. and Shioda, S.: Probability laws of consensus in a broadcast-based consensus-forming algorithm, *Stochastic Models*, Vol. 38 (2022), 91–115.