日本オペレーションズ・リサーチ学会
2022年 秋季研究発表会

連続時間モデルに基づく業績連動ストック・オプションの価値評価

京セラコミュニケーションシステム株式会社　呂　思南　LYU Shinan
01007984 大和大学 政治経済学部／大阪大学　＊大西 匡光　OHNISHI Masamitsu
EY 新日本有限責任監査法人　田中 寧々　TANAKA Nene[1]

１．はじめに

松本, 大西, 田中 [1] では, 売上げや利益などの業績に権利行使の条件を付したストック・オプションに対して, 株価と業績（強度）との連続時間の結合確率過程に基づく価値評価モデルを提案し，そのもとで，通常のオプションの価値評価のためのBlack—Scholes価格式に業績条件を組み入れた形式を持つ価格式を導出した. 本報告では, [1] での (1) 業績強度過程に用いたドリフト付きBrown運動をOrnstein—Uhlenbeck (OU) 過程(金利のVasicekモデル) に, (2) 業績連動関数を断崖 (cliff) 型から段階型に，拡張した価値評価モデルを提案する.

２．業績条件付ストック・オプションの評価モデル

リスク中立確率測度 $\mathbb{Q}$ が導入された適当な確率空間の上で，下記の確率モデルを考える：

連続時間 $\mathbb{R}_+ := [0,\infty)$ 上で企業活動がなされ，離散時間 $\mathbb{Z}_+ \coloneqq \{0,1,\ldots\} \subset \mathbb{R}_+$において会計・財務上の報告・開示がなされるものとする．ただし，簡単のため，単位時間を１（年）として，時点$T-1$から時点T までの時間区間$(T-1,T]$を第 T 期（間）と呼び，ストック・オプションが付与される時刻を時点 0 とする.

- **株価モデル** $(\boldsymbol{S_t, t \geq 0})$：

Black--Scholes モデルと同様，時点 t での株価S_t は幾何 Brown 運動に従うと仮定する：

$$\mathrm{d}S_t = rS_t\mathrm{d}t + \sigma_S S_t \mathrm{d}W_t^S,\quad t \geq 0 \Longrightarrow S_t = S_0 \exp\left\{\left(r - \frac{1}{2}\sigma_S^2\right)t + \sigma_S W_t^S\right\} = S_0\mathrm{e}^{X_t},\quad \mathrm{t} \geq 0, \tag{1}$$

あるいは，対数株価 $X_t \coloneqq \ln S_t - \ln S_0$は

$$\mathrm{d}X_t = \left(r - \frac{1}{2}\sigma_S^2\right)\mathrm{d}t + \sigma^S \mathrm{d}W_t^S,\quad t \geq 0 \Longrightarrow X_t = \mu_X t + \sigma_S W_t^S,\quad t \geq 0. \tag{2}$$

ここで $(W_t^S, t \geq 0)$は標準 Brown 運動, $r \geq 0$は連続複利での無リスク利子率, $\sigma_S > 0$はボラティリティ・パラメータであり，$\mu_X \coloneqq r - \frac{1}{2}\sigma_S^2$としている．このとき，$W_t^S \sim N(0,t)$により，$X_t \sim N(\mu_X t, \sigma_S^2 t)$ となる.

- **業績モデル** $(\boldsymbol{C_n, n = 1, 2, \ldots})$：

企業の業績は，通常，年度ごとや四半期ごとに開示される．この非連続的［離散時間的］な業績を連続時間モデルによって表現するために，まず，日々の業績よりもさらに小さい微小区間での業績強度［率］過程$(Y_s, s \geq 0)$を考える．時点 $s \geq 0$での業績強度をY_sとする.

[1] では，ドリフト付き Brown 運動を用いて，

$$\mathrm{d}Y_s = \mu_Y \mathrm{d}s + \sigma_Y \mathrm{d}W_s^Y,\quad s \geq 0 \Longrightarrow Y_s = Y_0 + \mu_Y s + \sigma_Y W_s^Y,\quad s \geq 0 \tag{3}$$

とモデル化した．ただし$(W_s^Y, s \geq 0)$は標準 Brown 運動, Y_0, μ_Y, σ_Y はパラメータである．また２つの標準 Brown 運動 $(W_t^S, t \geq 0), (W_s^Y, s \geq 0)$の相関を$\rho_{SY} \in [-1,1]$とする，すなわち$\mathrm{d}W_t^S \cdot \mathrm{d}W_t^Y = \rho_{SY}\mathrm{d}t$と仮定する．本報告ではこの業績強度過程を拡張して，下記の OU 過程（Vasicek モデル）で記述する：

$$\mathrm{d}Y_s = (a - bY_s)\mathrm{d}s + \sigma_Y \mathrm{d}W_s^Y = b \cdot \left(\frac{a}{b} - Y_s\right)\mathrm{d}s + \sigma_Y \mathrm{d}W_s^Y,\quad s \geq 0, \tag{4}$$

ただし，a, b はパラメータである（$b = 0$ の場合が，形式的には，ドリフト付き Brown 運動となる.）

この確率微分方程式は簡単に解くことができて，

$$Y_s = \frac{a}{b} + \left(Y_0 - \frac{a}{b}\right)\mathrm{e}^{-bs} + \sigma_Y \int_0^s e^{-b\cdot(s-u)}\mathrm{d}W_u^Y,\quad s \geq 0 \tag{5}$$

を得る．この業績強度過程 $(Y_s, s \geq 0)$から累積業績過程を求めれば,

$$I_t \coloneqq \int_0^t Y_s ds = \frac{a}{b}t + \left(\mathrm{Y}_0 - \frac{\mathrm{a}}{\mathrm{b}}\right)\beta(t) + \sigma_Y \int_0^t \beta(t-u)\mathrm{d}W_u^Y,\quad t \geq 0 \tag{6}$$

を得る．ただし$\beta(t) \coloneqq \int_0^t e^{-bs}\mathrm{d}s = \frac{1}{b}(1 - e^{-bt})$, $t \geq 0$.

[1] 本論文は，第３著者の田中 寧々が大阪大学経済学部に提出した懸賞論文，第１著者の呂　思南が大阪大学大学院経済学研究科に提出した修士論文に依っているが，彼らの現在の所属での業務との関わりは無い.

最後に，この累積業績過程 $(I_s, s \geq 0)$を使って，第 n 期の業績 C_nを以下のように定義する：

$$C_n \coloneqq I_n - I_{n-1} = \int_{n-1}^{n} Y_s \mathrm{d}s, \quad n \geq 1. \tag{7}$$

業績強度過程 $(Y_s, s \geq 0)$はGauss過程であり，従って累積業績過程 $(I_s, s \geq 0)$も同様であるので，その確率法則は平均関数：$\mu_I(t) \coloneqq \mathbb{E}[I_t] = \frac{a}{b}t + \left(Y_0 - \frac{a}{b}\right)\beta(t)$, $t \geq 0$, 自己共分散関数：$\sigma_I(s,t) \coloneqq \mathrm{Cov}[I_s, I_t] = \sigma_Y^2 \int_0^{\min\{s,t\}} \beta(s-u)\cdot\beta(t-u)\mathrm{d}s$，$0 \leq s,t < \infty$によって完全に記述される．また，対数株価過程 $(X_s, s \geq 0)$と累積業績過程 $(I_t, t \geq 0)$との（交差）共分散関数は$\sigma_{XI}(s,t) \coloneqq \mathrm{Cov}[X_s, I_t] = \rho_{SY}\sigma_S\sigma_Y \int_0^{\min\{s,t\}} \beta(t-u)\mathrm{d}u$, $0 \leq s,t < \infty$と計算される.

これらから離散時間のGauss過程となる業績過程 $(C_n, n \geq 1)$ の平均関数，自己共分散関数，分散関数を導出することができる.

- **リスク中立オプション評価 P_T：**

まず，満期（行使日）$T \geq 1$ を持ち，業績C_Tに下限$L \geq 0$ の条件の付けられた（断崖（cliff）型）業績連動ストック・オプションの価格$P_T(L)$ は，リスク中立評価公式により，下記の通りに計算される：

$$P_T(L) \coloneqq \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[\mathrm{e}^{-rT} g(S_T)\cdot h(C_T)] = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[\mathrm{e}^{-rT}[S_T - K]_+ \cdot 1_{\{C_T > L\}}\right] = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[\mathrm{e}^{-rT}[S_T - K]_+; C_T > L], \tag{8}$$

ただし，$g(S_T) \coloneqq [S_T - K]_+ \coloneqq \max\{S_T - K, 0\}$はペイオフ関数で,

$$h(C_T) \coloneqq 1_{\{C_T > L\}} \coloneqq \begin{cases} 1, & C_T > L; \\ 0, & C_T \leq L \end{cases} \tag{9}$$

は断崖型業績連動関数である，また$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[\,\cdot\,; A]$ は事象A 上に制限された期待値を表す.

3．業績条件付ストック・オプションの価格式の導出

第2節でのモデルのもとでは対数株価 X_Tと業績 C_Tとは2変量正規分布に従うことに注意する：

$$\begin{pmatrix} X_T \\ C_T \end{pmatrix} \sim N\left[\begin{pmatrix} \mu_X T \\ \mu_C \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sigma_S^2 T & \sigma_{XC} \\ \sigma_{XC} & \sigma_C^2 \end{pmatrix}\right] = N\left[\begin{pmatrix} \mu_X T \\ \mu_C \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sigma_S^2 T & \rho_{XC}\sigma_S\sigma_C\sqrt{T} \\ \rho_{XC}\sigma_S\sigma_C\sqrt{T} & \sigma_C^2 \end{pmatrix}\right] \tag{10}$$

ただし，$\mu_C, \sigma_C, \sigma_{XC}, \rho_{XC}$は所与の諸パラメータから導出され，式 (8)はつぎのように表現される：

$$\begin{aligned} P_T(L) &= S_0 \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[\mathrm{e}^{X_T - rT}; X_T > \ln\left(\frac{K}{S_0}\right), C_T > L\right] - K\mathrm{e}^{-rT}\mathbb{Q}\left(X_T > \ln\left(\frac{K}{S_0}\right), C_T > L\right) \\ &= S_0 \Phi_2\left(\frac{\ln\left(\frac{S_0}{K}\right) + \mu_X T}{\sigma_S\sqrt{T}} + \sigma_S\sqrt{T}, \frac{\mu_C - L}{\sigma_C} + \rho_{XC}\sigma_S\sqrt{T}; \rho_{XC}\right) - K\mathrm{e}^{-rT}\Phi_2\left(\frac{\ln\left(\frac{S_0}{K}\right) + \mu_X T}{\sigma_S\sqrt{T}}, \frac{\mu_C - L}{\sigma_C}; \rho_{XC}\right), \end{aligned} \tag{11}$$

ただし，$\Phi_2(x, y; \rho_{XC})$は相関ρ_{XC}の2変量標準正規累積分布関数である.

段階的業績連動関数$h(C)$ が (i) 単調非減少；(ii) 有界；(iii) $h(-\infty) = 0$；(iv) 右連続，であれば，$h(C) = \int_{-\infty}^{C} \mathrm{d}h(L) = \int_{-\infty}^{\infty} 1_{\{C > L\}} \mathrm{d}h(L)$と書けることから，Fubiniの定理を用いて，下記の価格式を得ることができる：

$$P_T \coloneqq \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[\mathrm{e}^{-rT} g(S_T)\cdot h(C_T)] = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[e^{-rT} g(S_T)\cdot 1_{\{C_T > L\}}\right]\mathrm{d}h(L) = \int_{-\infty}^{\infty} P_T(L)\mathrm{d}h(L). \tag{12}$$

4．パラメータの統計的推定

評価モデルにおける諸パラメータについては，まずは対数株価$(X_t, t \geq 0)$ の（準）連続時間観測，あるいは離散時間観測によってパラメータ σ_S を推定したのち，離散時間での対数株価・業績$((X_n, C_n), n = 1,2, \dots)$ の同時観測によりパラメータY_0, a, b, σ_Yを，そしてρ_{SY}を，原則，最尤推定法によって（数値的最適化手法を用いて）推定すれば良いが，より簡便な方法については，紙面の制約上，詳細は発表当日に説明する.

参考文献

[1] 松本敏幸，大西匡光，田中寧々 (2021),「連続時間モデルに基づく業績条件付きストック・オプションの価値評価」,『ファイナンスの数理解析とその応用』, 京都大学数理解析研究所 講究録, No. 2173, pp. 73—94, 2021.