無羨望マッチングの遷移*

	東北大学	伊藤 健洋	ITO Takehiro
05000566	京都大学	岩政 勇仁	IWAMASA Yuni
01111560	慶應義塾大学	垣村 尚徳	KAKIMURA Naonori
01111680	九州大学	⋆ 神山 直之	KAMIYAMA Naoyuki
01112000	京都大学	小林 佑輔	KOBAYASHI Yusuke
	広島大学	野崎 雄太	NOZAKI Yuta
01015413	電気通信大学	岡本 吉央	OKAMOTO Yoshio
	横浜国立大学	小関 健太	OZEKI Kenta

1.　はじめに

本稿では，不可分財を複数のエージェントに分配する問題を考える．特に，各エージェントは受入可能な財の集合に対して選好を持っており，各エージェントに単一の財が割り当てられる状況を考える．結果として現れる財のマッチングは選好に基づいて評価される．この問題は住宅分配問題 (house allocation problem) とよく呼ばれる．住宅分配に対して望まれる様々な性質が提案されている．本稿では，無羨望性 (envy-freeness) と呼ばれる性質に焦点を絞る．この性質は，現在のマッチングに関して，任意のエージェントが他のエージェントに対して羨望を持たないことを保証するものである．

住宅分配問題において無羨望マッチングが複数存在しうることを見るのは難しくない．そのため，無羨望マッチングが一つ与えられていても，それが満足できるものではないこともある．したがって，本稿では，現在の無羨望マッチングを財の交換によって改善する問題を考える．このとき，改善途中のマッチングも無羨望マッチングでなくてはならない．注意すべき点は，交換操作の定義である．エージェントが大勢いるとき，複数の財を同時に交換することは現実的ではないからである．したがって，もっと局所的な交換操作を考えるべきである．より具体的に述べると以下のとおりとなる．どのエージェントにも割り当てられていない財が，あるエージェントにとって，現在割り当てられている財よりも好ましい場合，その 2 つを交換した後のマッチングも無羨望であるならば，交換可能であるとする．この操作をできるかぎり実行する．そして，最終的に得られるマッチングを**改善主義的無羨望マッチング** (reformist envy-free matching) と呼ぶことにする．第一の結果として，改善主義的無羨望マッチングが最初の無羨望マッチングを決めれば一意に存在し，多項式時間で発見できることを証明する．したがって，最初の無羨望マッチングから改善主義的無羨望マッチングを得るための最短列を考察する．改善主義的無羨望マッチングを得るまでの列を**改善主義列** (reformist sequence) と呼び，最短改善主義列を発見する問題を**最短改善主義列問題** (shortest reformist sequence problem) と呼ぶことにする．

所与のマッチングをある種の操作によって改善する問題はマッチングの研究において考察されてきた．例えば，Gourvés, Lesca, Wilczynski [2] は社会ネットワークにおいて目標とするマッチングが合理的スワップ (rational swap) によって到達できるか判定する問題を考察した．彼らは，指定したエージェントが目標とする財を合理的スワップによって得られるか判定する問題も考察した ([1, 3] も参照せよ).

2.　準備

本稿を通じて，n 人の**エージェント** (agent) の有限集合を N，m 個の**財** (item) の集合を M で表す．各エージェント $i \in N$ には財の集合 $M_i \subseteq M$ と M_i 上の同順位を許さない線形順序 $\succ_i$ が付与されている．ここで，M_i はエージェント i が受入可能な財の集合を表し，$\succ_i$ は i が持つ M_i 上の選好を表す．順序 $\succ_i$ は推移性 (つまり，$x \succ_i y$ か

*JSPS 科研費 JP18H04091, JP19K11814, JP20H05793, JP20H05795, JP20K11670, JP20K23323, JP18H05291, JP19H05485, JP21H03397 の助成を受けた研究である．詳細は arXiv:2207.02641 を参照のこと．

つ $y \succ_i z$ ならば，$x \succ_i z$ であること）を満たすので注意する．各エージェント $i \in N$ に対して，$m_i := |M_i|$ と定義する．

単射 $\mu\colon N \to M$ が**マッチング** (matching) であるとは，各エージェント $i \in N$ に対して $\mu(i) \in M_i$ が成り立つことである．各マッチング μ に対して，財 $x \in M$ が**割当済** (assigned) であるとは，$\mu(i) = x$ を満たすエージェント $i \in N$ が存在することである．割当済でないとき，財は**未割当** (unassigned) であるという．マッチング μ が**無羨望** (envy-free) であるとは，異なるどのエージェント $i, j \in N$ も $\mu(j) \in M_i$ と $\mu(j) \succ_i \mu(i)$ を同時に満たさないことである．各マッチング μ に対して，μ における未割当財全体の集合を $\overline{M}_\mu$ で表す．

二つの無羨望マッチング μ, σ に対して，次の二条件を満たすエージェント $i \in N$ が存在するとき，$\mu \rightsquigarrow \sigma$ と書く．

(E1) $\sigma(i) \succ_i \mu(i)$.

(E2) 各 $j \in N \setminus \{i\}$ に対して，$\mu(j) = \sigma(j)$.

直感的にいうと，財が μ に従って割り当てられ，$\mu \rightsquigarrow \sigma$ であるとき，$\sigma(i) \in \overline{M}_\mu$ であり，i は自身に割り当てられている財 $\mu(i)$ を $\sigma(i)$ と交換するインセンティブを持ち，交換後のマッチングもまた無羨望である．このように，「$\rightsquigarrow$」という操作によって，現在の無羨望マッチング μ が一人のエージェントにおいて改善され，新しい無羨望マッチング σ が得られる．

無羨望マッチング μ, σ を考える．無羨望マッチング $\mu_0, \mu_1, \ldots, \mu_\ell$ で

- $\mu_0 = \mu$, $\mu_\ell = \sigma$,
- 各 $t \in \{0, 1, \ldots, \ell - 1\}$ に対して $\mu_t \rightsquigarrow \mu_{t+1}$,
- $\mu_\ell \rightsquigarrow \mu'$ を満たす無羨望マッチング μ' が存在しない

という三条件を満たすものが存在するとき，σ は μ に関する**改善主義的無羨望マッチング** (reformist envy-free matching) であると呼ばれる．直感的にいうと，μ に関する改善主義的無羨望マッチングとは，μ から反復改善の結果として得られる無羨望マッチングのことである．

3. 結果

まず，所与の無羨望マッチングに関する改善主義的無羨望マッチングが一意に存在することを証明する．

定理 1. 任意の無羨望マッチング μ に対して，μ に関する改善主義的無羨望マッチングは一意に存在する．

次に，最短改善主義列問題の判定問題版が NP 完全であることを証明する．

定理 2. 最短改善主義列問題の判定問題版は，各エージェント $i \in N$ に対して $m_i \leq 4$ であり，かつ，各財 $x \in M$ に対して $|\{i \in N \mid x \in M_i\}| \leq 3$ であっても NP 完全である．

そして，最短改善主義列問題の判定問題版が W[1] 困難でもあることを示す．

定理 3. 改善主義列で長さが $n + k$ 以下のものがあるか判定する問題は，k をパラメータとして，W[1] 困難である．

また，最短改善主義列問題の近似不可能性も証明する．

定理 4. $\mathrm{P} \neq \mathrm{NP}$ であるとき，最短改善主義列問題に対する多項式時間 $c \ln n$ 倍近似アルゴリズムは存在しない．ただし，$c > 0$ はある定数である．

次に，特殊な場合に関する肯定的な結果を述べる．次の肯定的な結果は，定理 2 と対を成すものだと考えられる．

定理 5. 各エージェント $i \in N$ に対して $m_i \leq 3$ であるとき，最短改善主義列問題は多項式時間で解ける．

定理 6. 各財 $x \in M$ に対して $|\{i \in N \mid x \in M_i\}| \leq 2$ であるとき，最短改善主義列問題は多項式時間で解ける．

最後に，最短改善主義列問題に対する固定パラメータ容易性 (fixed-parameter tractability, FPT) を証明する．

定理 7. 最短改善主義列問題は $m - 2n$ をパラメータとして固定パラメータ・アルゴリズムを持つ．

参考文献

[1] F. Brandt and A. Wilczynski. On the convergence of swap dynamics to Pareto-optimal matchings. In *Proceedings of WINE 2019*, volume 11920 of *LNCS*, pages 100–113, 2019.

[2] L. Gourvès, J. Lesca, and A. Wilczynski. Object allocation via swaps along a social network. In *Proceedings of IJCAI 2017*, pages 213–219, 2017.

[3] S. Huang and M. Xiao. Object reachability via swaps under strict and weak preferences. *Autonomous Agents and Multi-Agent Systems*, 34(2):51, 2020.