

球面の三角形分割の彩色遷移*

	東北大学	伊藤 健洋	ITO Takehiro
05000566	京都大学	★ 岩政 勇仁	IWAMASA Yuni
01112000	京都大学	小林 佑輔	KOBAYASHI Yusuke
	東京理科大学	前澤 俊一	MAEZAWA Shun-ichi
	広島大学	野崎 雄太	NOZAKI Yuta
01015413	電気通信大学	岡本 吉央	OKAMOTO Yoshio
	横浜国立大学	小関 健太	OZEKI Kenta

1. はじめに

$G = (V, E)$ を 3 彩色可能三角形分割とする (本稿では, 明確に述べない限り, 三角形分割は 2 次元球面の三角形分割を意味するものとする). 1973 年に Fisk [3] は, G の任意の 4 彩色が Kempe 同値であること, すなわち, Kempe 変換を繰り返すことで互いに移りあえることを示した. Fisk の結果は, (i) G の任意の 3 彩色 ($\{0, 1, 2, 3\}$ のうち 3 色しか使っていない彩色) が Kempe 同値である, (ii) G の任意の 4 彩色はある 3 彩色と Kempe 同値である, という二つの主張から従う.

ここで, G の 4 彩色 $\alpha: V \rightarrow \{0, 1, 2, 3\}$ に対する **Kempe 変換**とは, 「相異なる色 $a, b \in \{0, 1, 2, 3\}$ に対し, α において色 a または b で塗られている頂点集合による誘導部分グラフの連結成分 C を一つ選び, C 内の色 a と b を交換する」という操作で別の 4 彩色を構成するものである. 本稿では, C が一つの頂点からなる際の Kempe 変換を特に**単変換**とよぶことにする. 4 彩色 α, β が **Kempe 同値**であるとは, α に対して Kempe 変換を繰り返すことで β が得られることをいう. 単変換に対しては, 同様に**単同値**であることを定義できる.

では, Fisk の結果を構成する二つの主張 (i), (ii) 内の「Kempe 同値」を「単同値」に変えるとどうなるだろうか. このとき, (i) に対応する主張は成立する. すなわち, G の任意の 3 彩色は単同値である. 一方, ある 3 彩色可能三角形分割においては, 3 彩色と単同値でない 4 彩色が存在するため, (ii) に対応する主張は一般的には成立しないことが分かる.

ここで, 以下の二つの疑問が生じる.

(Q1) G のどのような 4 彩色が 3 彩色と単同値なのか?

(Q2) どのような 3 彩色可能三角形分割ならば, 任意の 4 彩色が単同値となるのか?

これらの疑問に対する解答として, 本研究では

(A1) G の 4 彩色が, 3 彩色と単同値であるための特徴づけ

(A2) 任意の 4 彩色が単同値となる 3 彩色可能三角形分割の特徴づけ

を与えた. さらにこれらの特徴づけは線形時間で判定可能なものとなっている.

我々の成果は, 組合せ遷移分野において中心的な問題である k 彩色遷移問題や k 彩色連結性問題と密接に関係する. k 彩色遷移問題とは, k 彩色可能グラフとその k 彩色 α, β が与えられたとき, α と β が単同値か否かを判定する問題であり, k 彩色連結性問題とは, k 彩色可能グラフ G のみが与えられ, G の任意の k 彩色が単同値か否かを判定する問題である. 本研究により, 4 彩色遷移問題や 4 彩色連結性問題における新たな多項式時間可解なクラスが明らかになった.

さらに, 2 次元球面の 3 彩色可能三角形分割の高次元への拡張として, d 次元球面の $(d+1)$ 彩色可能三角形分割を考え, それらに関する結果も得たが, 本稿では, 2 次元球面の 3 彩色可能三角形分割に対する成果 (A1), (A2) のみを概説する.

2. 準備

$G = (V, E)$ を 3 彩色可能三角形分割とし, F を G の面の集合とする. 頂点 v を含む G の面の集合を $F(v)$ と書く.

G の各 4 彩色を頂点とし, 二つの 4 彩色 α, β が 1 回の単変換で移りあえるときに α, β 間に枝を張

*JSPS 科研費 JP20H05793, JP20H05795, JP20K11670, JP20K14317, JP20K23323, JP22K17854, JP22K13956 の助成を受けた研究である.

ることで構成されるグラフを、 G の 4 彩色遷移グラフとよび、 $\mathcal{R}_4(G)$ と書く。つまり、 G の 4 彩色 α, β が単同値であることと、 α, β が $\mathcal{R}_4(G)$ 上で同じ連結成分に属することは、等価である。1 節で述べたように、 G の任意の 3 彩色は単同値であるため、 $\mathcal{R}_4(G)$ 上で同じ連結成分に属する。この連結成分を 3 彩色連結成分とよぶ。

3. 3 彩色連結成分の特徴づけ

本節では、本研究の主結果の一つである、3 彩色連結成分の特徴づけについて述べる。これは (A1) に対応する。

$\alpha: V \rightarrow \{0, 1, 2, 3\}$ を G の 4 彩色とする。 G の各面に $+1/-1$ を割り当てる関数 $\varepsilon_\alpha: F \rightarrow \{+1, -1\}$ を、隣接する面 $f = \{u, v, w\}, f' = \{u, v, w'\} \in F$ に対して

$$\alpha(w) = \alpha(w') \iff \varepsilon_\alpha(f) \neq \varepsilon_\alpha(f')$$

が成り立つように定める (そのような関数は存在する)。頂点 $v \in V$ に対して、 v を含む面 $f \in F(v)$ であって $\varepsilon_\alpha(f) = \pm 1$ となるものの個数を $\#\varepsilon_{\alpha,v}^{-1}(\pm 1)$ (復号同順) と書く。

ε_α の定義から、 α が 3 彩色であることと、任意の隣接する面 $f, f' \in F$ に対して $\varepsilon_\alpha(f) \neq \varepsilon_\alpha(f')$ となることが同値であることが分かる。特にこのことから、3 彩色 α に対しては、以下の釣合条件 (B) が成立することが分かる：

(B) 任意の頂点 $v \in V$ に対して、

$$\#\varepsilon_{\alpha,v}^{-1}(+1) = \#\varepsilon_{\alpha,v}^{-1}(-1).$$

4 彩色 α の頂点 v_0 の色を変更することを考えよう。変更後の 4 彩色を α' とすると、簡単な観察から

$$\varepsilon_{\alpha'}(f) = \begin{cases} -\varepsilon_\alpha(f) & \text{if } f \in F(v_0), \\ \varepsilon_\alpha(f) & \text{if } f \notin F(v_0) \end{cases}$$

が得られる。この変更により、各頂点 $v \in V$ において、 v のまわりの $+1/-1$ を割り当てられた面の数は変わらない。すなわち、任意の v に対して、 $\#\varepsilon_{\alpha,v}^{-1}(+1) = \#\varepsilon_{\alpha',v}^{-1}(+1)$ かつ $\#\varepsilon_{\alpha,v}^{-1}(-1) = \#\varepsilon_{\alpha',v}^{-1}(-1)$ が成立する。

以上の観察から、3 彩色連結成分に属する任意の 4 彩色 α は釣合条件 (B) を満たすことが分かる。

我々は逆も成り立つこと、すなわち、釣合条件 (B) によって 3 彩色連結成分を特徴づけられることを示した。

定理 1. G の 4 彩色 α が 3 彩色連結成分に属する必要十分条件は、釣合条件 (B) を満たすことである。

与えられた 4 彩色 α が釣合条件 (B) を満たすか否かは $O(\#F) = O(\#V)$ 時間で判定可能であることに注意されたい。

4. $\mathcal{R}_4(G)$ が連結であるための特徴づけ

本節では、本研究の主結果の一つである、 $\mathcal{R}_4(G)$ が連結であるための特徴づけについて述べる。これは (A2) に対応する。

G の面ではないような長さ 3 のサイクルを分離三角形とよぶ。 G の分離三角形 C により G を分離することで、 C の内側の頂点集合による G の誘導部分グラフと C の外側の頂点集合による G の誘導部分グラフという、二つの 2 次元球面の 3 彩色可能三角形分割を構成することができる。この操作を繰り返すことで、分離三角形をもたない 3 彩色可能三角形分割の集合が得られるが、この集合の要素を G の 4 連結片とよぶ。最終的に得られる G の 4 連結片の集合は、操作の順番によらず一意に定まることが知られている [2]。

本研究により、以下の特徴づけを得た。

定理 2. $\mathcal{R}_4(G)$ が連結であることと、 G の全ての 4 連結片が八面体グラフ (正八面体の 1-骨格) と同型となることが同値である。

G の分離三角形は $O(\#V)$ 時間で全て列挙できることが知られているため [1]、定理 2 より、3 彩色可能三角形分割に対する 4 彩色連結性問題は線形時間で解けることが分かる。

参考文献

- [1] N. Chiba and T. Nishizeki. Arboricity and subgraph listing algorithms. *SIAM J. Comput.*, 14(1):210–223, 1985.
- [2] W. H. Cunningham and J. Edmonds. A combinatorial decomposition theory. *Canadian J. Math.*, 32(3):734–765, 1980.
- [3] S. Fisk. Combinatorial structure on triangulations. I. The structure of four colorings. *Advances in Math.*, 11:326–338, 1973.