

集合値写像の錐連続性の一般化について

新潟大学 プレムユーダ・デッチブーン DECHBOON Premyuda
01306172 新潟大学 *田中 環 TANAKA Tamaki

1. はじめに

本研究では、アルゴリズムの収束性や集合最適化 (set optimization) でよく利用される、集合値写像の (錐) 半連続性とその一般化について紹介する. 従来の集合値最適化問題における集合の最適性規準は、ベクトル最適化の延長線上にあり、集合族に対するある種の半順序のような二項関係に対して必ずしも望むべき解になっているとは限らない状況であった. 最近では、このようなベクトル同士の有効性の代わりに、集合間の直接的な比較法とその二項関係を保存するような非線形のスカラー化関数が複数提案され利用されている.

一方、反復法におけるアルゴリズムの大域的収束性を議論する際には、そのアルゴリズム写像を集合値写像として考えて、どんな半連続性が成立するのかが吟味される. 最近、集合最適化の分野で、集合値写像の半連続性がスカラー化関数 (集合関数) との合成によって、どのように遺伝されるかの解明に向けた研究が行われている. このことは、うまくスカラー化関数を選びその合成写像の半連続性を調べることで収束性が理論的に保障できることを意味する. 本研究では、それらの最新の研究の動向を報告する.

2. ベクトルと集合のスカラー化関数

ベクトル最適化では、与えられたベクトル z をある規準 d に基づいて実数に対応させる次のような劣線形のスカラー化関数 (Gerstewitz (Tammer) のスカラー化関数) がよく利用される ([2]).

$$h_C(z; d) = \inf \{t \in \mathbb{R} \mid z \in td - C\} \quad (1)$$

ここで、 C はある実ベクトル空間 Y の順序凸錐 ($x, y \in Y$ に対して $y - x \in C$ が成立するとき、 $x \leq_C y$ と定義する) を表し、 $C \neq Y$ で $d \in \text{int}(C)$ を満たすとする. 前順序 $\leq_C$ は、反射律と推移律を満たす二項関係であるが、 C が pointed ($C \cap (-C) = \{0\}$) であるときは、 $\leq_C$ は Y 上の半順序となり、多目的計画では、 $C = \mathbb{R}_+^n$ が一般的に使われている.

次に、集合 $A \subset Y$ をスカラー化することを考える. Gerstewitz のスカラー化関数で、基準点を原点からもっと一般的な点もしくは参照集合 $V \subset Y$ に変え、規準 $d \in \text{int}(C)$ で評価する劣線形のスカラー化手法が考えられる. それは、Kuroiwa-Tanaka-Ha [5] が導入した、ベクトル空間の空でない集合 A と B の二項関係に基づいたスカラー化関数を利用する方法である.

定義 1 (set-relations, [5])

$$A \leq_C^{(1)} B \stackrel{\text{def}}{\iff} A \subset \bigcap_{b \in B} (b - C) \\ \iff B \subset \bigcap_{a \in A} (a + C)$$

$$A \leq_C^{(2L)} B \stackrel{\text{def}}{\iff} A \cap \bigcap_{b \in B} (b - C) \neq \emptyset$$

$$A \leq_C^{(3L)} B \stackrel{\text{def}}{\iff} (A + C) \supset B$$

$$A \leq_C^{(2U)} B \stackrel{\text{def}}{\iff} \bigcap_{a \in A} (a + C) \cap B \neq \emptyset$$

$$A \leq_C^{(3U)} B \stackrel{\text{def}}{\iff} A \subset (B - C)$$

$$A \leq_C^{(4)} B \stackrel{\text{def}}{\iff} A \cap (B - C) \neq \emptyset \\ \iff (A + C) \cap B \neq \emptyset$$

定義 2 ([6]) 各 $j = 1, 2L, 3L, 2U, 3U, 4$, に対して

$$I_C^{(j)}(A; V, d) := \inf \left\{ t \in \mathbb{R} \mid A \leq_C^{(j)} (td + V) \right\} \quad (2)$$

$$S_C^{(j)}(A; V, d) := \sup \left\{ t \in \mathbb{R} \mid (td + V) \leq_C^{(j)} A \right\} \quad (3)$$

性質 1 各 $j = 1, 2L, 3L, 2U, 3U$ で、 $A \leq_C^{(j)} B$ ならば、次の順序保存則が成り立つ.

$$I_C^{(j)}(A; V, d) \leq I_C^{(j)}(B; V, d) \\ S_C^{(j)}(A; V, d) \leq S_C^{(j)}(B; V, d)$$

また、集合値写像 F との合成を考えて $A = F(x)$ とすると、2つの写像

$$x \mapsto I_C^{(j)}(F(x); V, d), \quad x \mapsto S_C^{(j)}(F(x); V, d)$$

は集合値写像 F のある種の半連続性や凸性のある程度遺伝する性質を持つ ([3, 4]). これらはベクトル値関数に対する線形スカラー化や劣線形スカラー化ではよく知られた性質である.

3. 2項関係と位相に関する一般化半連続性

2つの連続な実数値関数の合成写像が連続となることはよく知られたことである。これと似た性質として、錐半連続性を持つベクトル値関数とその錐の上で非負の値をとる連続線形汎関数の合成写像が同様の半連続性を持つことも証明され ([7]), 集合値写像についても部分的に成り立っている ([4])。実数値関数の半連続性は実数の全順序性に基づく性質で、ベクトル値関数や集合値写像の錐半連続性はそれに対応する性質である。ここでは、それらの概念の一般化と [7] の結果を包含する [3] の結果の一般化を紹介する。以下では、 X を位相空間、 Y を実線形位相空間 ($\mathbb{R}^n$ はその一例)、 $C \subsetneq Y$ を $0 \in C$ をみたす凸錐、 $\mathcal{P}(Y)$ を Y の空でない部分集合全体、 $\preceq$ を $\mathcal{P}(Y)$ 上の2項関係とする。

定義 3 ([1]) 集合値写像 $F : X \rightarrow \mathcal{P}(Y)$ と $x_0 \in X$ について、 $W \preceq F(x_0)$ となる Y の任意の開集合 W に対して、 $W + C \preceq F(x)$, $\forall x \in V$ をみたす x_0 の近傍 V が存在するときに、 F は x_0 において $(\preceq, C)$ -連続であるという。

例えば、 $A \preceq_1 B$ を $A \cap B \neq \emptyset$ で、 $A \preceq_2 B$ を $B \subset A$ で定義すると、 $(\preceq_1, C)$ -連続性は C -下半連続性、 $(\preceq_2, C)$ -連続性は C -上半連続性という錐連続性を意味する。また、それぞれ、 $C = \{0\}$ の場合は集合値写像の古典的な「下半連続性」と「上半連続性」を表している。そのため、“ $(\preceq, C)$ -連続性”を「一般化半連続性」とよぶ。

また、スカラー化関数に対してもこれらに対応して、次のような概念を定義する。

定義 4 ([1]) 集合関数 $\varphi : \mathcal{P}(Y) \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ と $A_0 \in \mathcal{P}(Y)$ について、

- (i) $r < \varphi(A_0)$ となる任意の r に対して、 $W \preceq A_0$ であって、 $r < \varphi(A)$, $\forall A \in U(W+C, \preceq)$ をみたす開集合 $W \in \mathcal{P}(Y)$ が存在するときに、 φ は A_0 において $(\preceq, C)$ -下半連続であるという。
- (ii) $r > \varphi(A_0)$ となる任意の r に対して、 $W \preceq A_0$ であって、 $r > \varphi(A)$, $\forall A \in U(W+C, \preceq)$ をみたす開集合 $W \in \mathcal{P}(Y)$ が存在するときに、 φ は A_0 において $(\preceq, C)$ -上半連続であるという。

ただし、 $U(V, \preceq) := \{A \in \mathcal{P}(Y) \mid V \preceq A\}$ 。

これらの概念は実数値関数の下半連続性、上半連続性の一般化にあたり、次の結果が成立する。

定理 1 ([1]) 集合値写像 $F : X \rightarrow \mathcal{P}(Y)$ と集合関数 $\varphi : \mathcal{P}(Y) \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ について、 F が x_0 において $(\preceq, C)$ -連続とする。

- (i) φ が $F(x_0)$ において $(\preceq, C)$ -下半連続ならば、合成写像 $\varphi \circ F$ は x_0 で下半連続となる。
- (ii) φ が $F(x_0)$ において $(\preceq, C)$ -上半連続ならば、合成写像 $\varphi \circ F$ は x_0 で上半連続となる。

これらの定理により、定義 2 の (2) と (3) におけるスカラー化関数のほとんどが集合値写像の錐半連続性を遺伝することが数学的に保証される ([1])。

4. おわりに

本研究は、JSPS 科研費 21K03367 に基づくものである。

参考文献

- [1] P. Dechboon and T. Tanaka, *Inheritance properties on cone continuity for set-valued maps via scalarization*, to appear in *Minimax Theory and its Applications*.
- [2] A. Göpfert, H. Riahi, C. Tammer, and C. Zălinescu, *Variational methods in partially ordered spaces*, Springer-Verlag, New York, 2003.
- [3] K. Ike, M. Liu, Y. Ogata, and T. Tanaka, *Semicontinuity of the composition of set-valued map and scalarization function for sets*, *J. Appl. Numer. Optim.*, **1** (2019), 267–276.
- [4] S. Kobayashi, Y. Saito, and T. Tanaka, *Convexity for compositions of set-valued map and monotone scalarizing function*, *Pacific J. Optim.*, **12** (2016), 43–54.
- [5] D. Kuroiwa, T. Tanaka, and T. X. D. Ha, *On convexity of set-valued maps*, *Nonlinear Anal.*, **30** (1997), 1487–1496.
- [6] 久須美裕, 田中 環, 山田修司: 集合最適化における劣線形スカラー化手法について, 日本 OR 学会春季研究発表会 (沖縄県市町村自治会館), アブストラクト集 (2017) 341–342.
- [7] T. Tanaka, *Generalized semicontinuity and existence theorems for cone saddle points*, *Appl. Math. Optim.*, **36** (1997), 313–322.