

集合比較を用いた最適化問題の実行可能性判定について

05000844 金沢学院大学 小形優人 OGATA Yuto

1. はじめに

本発表では、有限次元空間における最適化問題の実行可能性が摂動に対してどの程度頑強であるかを判断するための集合値不等式とその特徴づけ関数を用いたアルゴリズムを紹介する。

2. 集合値不等式と特徴づけ関数

X を線形位相空間、 $C \subset X$ を内部が空でない凸錐、 $A, B \subset X$ を非空な集合とする。本研究では以下の6通りの集合値不等式 (set relations, [1]) を用いる。

$$\begin{aligned} A \preceq_C^{(1)} B &: \iff A \subset \bigcap_{b \in B} (b - C); \\ A \preceq_C^{(2)} B &: \iff A \cap \bigcap_{b \in B} (b - C) \neq \emptyset; \\ A \preceq_C^{(3)} B &: \iff B \subset A + C; \\ A \preceq_C^{(4)} B &: \iff B \cap \bigcap_{a \in A} (a + C) \neq \emptyset; \\ A \preceq_C^{(5)} B &: \iff A \subset B - C; \\ A \preceq_C^{(6)} B &: \iff B \cap A + C \neq \emptyset \end{aligned}$$

これらの定義は A, B が一点集合の場合、通常のベクトルの半順序

$$x \leq_C y \iff y - x \in C$$

と等価である。また、 $k \in \text{int } C$ について、特徴づけ関数 $\Phi_{C,k}^{(i)} : X \times X \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ を

$$\Phi_{C,k}^{(i)}(A, B) := \inf \{t \in \mathbb{R} \mid A \preceq_C^{(i)} tk + B\}$$

とする ([2])。このとき、ある位相的条件の下で

$$\begin{aligned} A \preceq_{\text{int } C}^{(i)} B &\iff \Phi_{C,k}^{(i)}(A, B) < 0; \\ A \preceq_{\text{cl } C}^{(i)} B &\iff \Phi_{C,k}^{(i)}(A, B) \leq 0 \end{aligned}$$

が成り立つことが分かっている (集合の二者択一定理, [3])。

3. 特徴づけ関数の双対表現

X を n 次元ベクトル空間とする。非空集合 $A, B \subset X$ および $C = \{x \mid p_j^T x \leq 0, j = 1, \dots, m\}$ について、

$$\Phi_{C,k}^{(1)}(A, B) = \sup_{a \in A} \sup_{b \in B} \max_{j=1, \dots, m} \frac{p_j^T(a-b)}{p_j^T k};$$

$$\Phi_{C,k}^{(2)}(A, B) = \inf_{a \in A} \sup_{b \in B} \max_{j=1, \dots, m} \frac{p_j^T(a-b)}{p_j^T k};$$

$$\Phi_{C,k}^{(3)}(A, B) = \sup_{b \in B} \inf_{a \in A} \max_{j=1, \dots, m} \frac{p_j^T(a-b)}{p_j^T k};$$

$$\Phi_{C,k}^{(4)}(A, B) = \inf_{b \in B} \sup_{a \in A} \max_{j=1, \dots, m} \frac{p_j^T(a-b)}{p_j^T k};$$

$$\Phi_{C,k}^{(5)}(A, B) = \sup_{a \in A} \inf_{b \in B} \max_{j=1, \dots, m} \frac{p_j^T(a-b)}{p_j^T k};$$

$$\Phi_{C,k}^{(6)}(A, B) = \inf_{a \in A} \inf_{b \in B} \max_{j=1, \dots, m} \frac{p_j^T(a-b)}{p_j^T k}$$

がいえる。したがって、有限次元における凸多面錐による順序が与えられた場合、特徴づけ関数は双線形形式で書くことができる。

4. 最適化問題への応用

S を非空集合、 $f : S \rightarrow \mathbb{R}$, $g : S \rightarrow \mathbb{R}^n$, $r \in \mathbb{R}^n$ とし、最適化問題

$$(P) \text{ Minimize } f(s) \text{ subject to } g(s) \leq_C r$$

の制約条件に

$$\begin{aligned} G(s) &:= \{g(s) \mid g \in G\} = \{x \mid P_G(s)x \leq q_G(s)\} \\ R &:= \{x \mid P_R x \leq q_R\} \end{aligned}$$

となるような摂動 $g \in G$, $r \in R$ を与えたとする。ただし $P_G : S \rightarrow M^{\alpha \times n}$, $q_G : S \rightarrow \mathbb{R}^\alpha$, $P_R \in M^{\beta \times n}$, $q_R \in \mathbb{R}^\beta$, $C = \{x \mid p_j^T x \leq 0, j = 1, \dots, m\}$ とする。また、Fourier-Motzkin の消去法により、有限集合値写像 $G_1, G_2 : S \rightarrow 2^{\mathbb{R}^n}$, および有限集合 R_1, R_2, P について

$$G(s) = \text{conv } G_1(s) + \text{cone } G_2(s);$$

$$R = \text{conv } R_1 + \text{cone } R_2;$$

$$C = \text{cone } P$$

とすることができる。このとき、(P) の実行可能性について次の主張が成り立つ。

- ある $s \in S$ について

$$\min_{j=1,\dots,m} \{\text{Val}(\text{P1}(j, s))\} \leq 0$$

のとき, (P) は任意の $g \in G$, $r \in R$ について実行可能である。

- ある $s \in S$ について

$$G_2(s) \subset C, \quad \text{Val}(\text{P2}(s)) \leq 0$$

のとき, ある $g \in G$ について (P) は任意の $r \in R$ で実行可能である。

- ある $s \in S$ について

$$G_2(s) \subset C, \quad \sup_{r \in R} \{\text{Val}(\text{P3}(r, s))\} \leq 0$$

のとき, 任意の $g \in G$ について (P) が実行可能となる $r \in R$ が存在する。

- ある $s \in S$ について

$$R_2 \subset C, \quad \text{Val}(\text{P4}(s)) \leq 0$$

のとき, 任意の $g \in G$ について (P) が実行可能となる $r \in R$ が存在する。

- ある $s \in S$ について

$$R_2 \subset C, \quad \sup_{x \in G(s)} \{\text{Val}(\text{P5}(x))\} \leq 0$$

のとき, 任意の $r \in R$ について (P) が実行可能となる $g \in G$ が存在する。

- ある $s \in S$ について

$$G_2(s), R_2 \subset C, \quad \text{Val}(\text{P6}(s)) \leq 0$$

のとき, ある $g \in G$, $r \in R$ について (P) は実行可能となる。

$$\begin{array}{l|l} \text{P1}(j, s) & \begin{array}{l} \text{Maximize } \frac{p_j^T(x-r)}{p_j^T k} \\ \text{s.t. } P_G(s)x \leq q_G(s), \mathbf{P}_R x \leq \mathbf{q}_R. \end{array} \\ \text{P2}(s) & \begin{array}{l} \text{Minimize } t \in \mathbb{R} \\ \text{s.t. } \frac{p_j^T x}{p_j^T k} + \sup_{r \in R} \frac{p_j^T - r}{p_j^T k} \leq t \\ \quad \forall j = 1, \dots, m, \\ P_G(s)x \leq q_G(s). \end{array} \end{array}$$

$$\begin{array}{l|l} \text{P3}(r, s) & \begin{array}{l} \text{Minimize } t \in \mathbb{R} \\ \text{s.t. } \frac{p_j^T(x-r)}{p_j^T k} \leq t \quad \forall j = 1, \dots, m, \\ P_G(s)x \leq q_G(s). \end{array} \\ \text{P4}(s) & \begin{array}{l} \text{Minimize } t \in \mathbb{R} \\ \text{s.t. } \sup_{x \in G(s)} \frac{p_j^T x}{p_j^T k} + \frac{p_j^T - r}{p_j^T k} \leq t \\ \quad \forall j = 1, \dots, m, \\ \mathbf{P}_R x \leq \mathbf{q}_R. \end{array} \\ \text{P5}(x) & \begin{array}{l} \text{Minimize } t \in \mathbb{R} \\ \text{s.t. } \frac{p_j^T(x-r)}{p_j^T k} \leq t \quad \forall j = 1, \dots, m, \\ \mathbf{P}_R x \leq \mathbf{q}_R. \end{array} \\ \text{P6}(s) & \begin{array}{l} \text{Minimize } t \in \mathbb{R} \\ \text{s.t. } \frac{p_j^T(x-r)}{p_j^T k} \leq t \quad \forall j = 1, \dots, m, \\ P_G(s)x \leq q_G(s), \mathbf{P}_R x \leq \mathbf{q}_R. \end{array} \end{array}$$

5. おわりに

本研究では集合値不等式と特徴づけ関数の間の同値関係を最適化問題のロバスト性に応用する方法について紹介した。有限次元空間の凸多面集合に限れば, 問題 P1 から P6 は線形計画法を高々有限回用いることで計算可能であり, 集合が有限, 有界でなくとも適用できることが大きな特徴といえる。

謝辞

本研究は, JSPS 科研費 JP21K13842 の助成を受けたものである。

参考文献

- [1] Kuroiwa D., Tanaka T., Ha T.X.D., *On cone convexity of set-valued maps*, Nonlinear Anal. **30** (1997), 1487–1496.
- [2] Kuwano I., Tanaka T., Yamada S., *Characterization of nonlinear scalarizing functions for set-valued maps*, in Proc. of the Asian Conference on Nonlinear Analysis and Optimization, Yokohama Publishers, Yokohama, 2009, 193–204.
- [3] Ogata Y., Tanaka T., Saito Y., Lee G.M., Lee J.H., *An alternative theorem for set-valued maps via set relations and its application to robustness of feasible sets*, Optimization **67** (2018), 1067–1075.