日本オペレーションズ・リサーチ学会
2022年 秋季研究発表会

2段階分布的ロバスト確率非協力ゲームにおける 均衡解の存在性とクールノー競争への応用

05000516　京都大学　*堀　篤史　HORI Atsushi
01704634　京都大学　山下信雄　YAMASHITA Nobuo

1. はじめに

非協力ゲームはプレイヤー・戦略・利得が定義され，各プレイヤーが自身の利得を最大化するために競合する状況を表す．また，ナッシュ均衡はすべてのプレイヤーが戦略を変える動機をもたない状態であり，非協力ゲームの理論における中心的概念の一つである．

多段階確率非協力ゲームは，各プレイヤーが情報の動的な変化に応じて演じるような不確実性の下での非協力ゲームである．近年，等価な多段階確率変分不等式 [3] を考えることにより，連続的な値を戦略とする多段階確率非協力ゲームの分析やナッシュ均衡の求解法の研究が盛んに行われている．しかし，モデルに現れる確率変数の確率分布は既知とされ，その確率分布の不確実性は最近まで考察されていなかった．

Liu ら [2] は分布的ロバスト最適化の概念を確率非協力ゲームに導入し，1段階分布的ロバスト確率非協力ゲームを考察し，均衡解の存在条件を明らかにした．分布的ロバスト最適化とは，確率分布の不確実性の下での最悪の確率分布を想定した最適化モデルである．一方2段階モデルは，Li ら [1] が各プレイヤーが *linear decision rule* [4] の下で線形の2段階分布的ロバスト最適化問題を解くような確率非協力ゲームを考察した．しかし，非線形の場合における均衡解の存在条件は明らかにしていない．また，linear decision rule は数値計算を容易にするために導入された仮定であり，現実の意思決定において妥当性は一般に保証できない．

本研究は先行研究 [1] よりも広いクラスの2段階分布的ロバスト確率非協力ゲームを考察し，均衡解の存在条件を明らかにする．さらに，その応用として分布的ロバスト2段階確率クールノー競争を考え，各プレイヤーが分布的ロバスト性を考慮することで与える意思決定への影響を数値実験を通して明らかにする．

2. 提案モデルとその均衡解の存在性

プレイヤー数を N とし，$j \in \{1,\dots,N\}$ をプレイヤーを識別するラベルとする．プレイヤー j について以下の記法を用いる．

- $\xi\colon \Omega \to \Xi$：確率変数（$\boldsymbol{\xi} \in \Xi$ を観測値とする）
- $x_j \in \mathbb{R}^{n_j}, y_j(\xi) \in \mathbb{R}^{m_j}$：プレイヤー j の第一・第二段階の戦略
- $x_{-j} \in \mathbb{R}^{n-n_j}, y_{-j}(\xi) \in \mathbb{R}^{m-m_j}$：プレイヤー j を除くすべてのプレイヤーの第一・第二段階の戦略組．ただし，$n := \sum_{j=1}^N n_j, m := \sum_{j=1}^N m_j$ とする
- $X_j \subset \mathbb{R}^{n_j}, Y_j(x_j,\xi) \subset \mathbb{R}^{m_j}$：プレイヤー j の第一・第二段階の戦略集合
- $\theta_j\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \gamma_j\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \Xi \to \mathbb{R}$：プレイヤー j の第一・第二段階の利得関数
- $\mathscr{P}_j$：確率分布の不確実性集合

まず，第二段階でシナリオ $\boldsymbol{\xi} \in \Xi$ を観測したときを考える．プレイヤー j はすでに決定された $(x_j, x_{-j}) \in X_j \times X_{-j}$ のもとで，以下の利得最大化問題を解く．

$$\max_{y_j(\boldsymbol{\xi}) \in Y_j(x_j,\boldsymbol{\xi})} \gamma_j(y_j(\boldsymbol{\xi}), y_{-j}(\boldsymbol{\xi}), x_j, x_{-j}, \boldsymbol{\xi})$$

ここで，上記の最適値を $Q_j(x_j, x_{-j}, \boldsymbol{\xi})$ とおく．

第一段階でプレイヤー j は，自身の期待利得 $\mathbb{E}[Q_j(x_j,x_{-j},\xi)]$ の最大化を考えるが，ここで確率変数 ξ の確率分布が正確にわからないため，観測データなどを用いて確率分布の不確実性集合 $\mathscr{P}_j$ を構築する．その中で最小の期待利得，すなわち $\inf_{P\in\mathscr{P}_j} \mathbb{E}_P[Q_j(x_j,x_{-j},\xi)]$ を想定し，以下の最適化問題を解く．

$$\max_{x_j \in X_j} \ \Theta_j(x_j,x_{-j}) := \Big\{\theta_j(x_j,x_{-j}) + \inf_{P\in\mathscr{P}_j} \mathbb{E}_P[Q_j(x_j,x_{-j},\xi)]\Big\}$$

ここで，文献 [1] は θ_j と γ_j がともに線形，かつ $X_j, Y_j(x_j,\boldsymbol{\xi})$ が線形の制約条件で与えられている．したがって，本研究は [1] の一般化とみなせる．

本研究は以下の定義を満たすような均衡解の存在条件を明らかにする．

定義 1. 点 $(x^*, y^*(\cdot))$ が 2 段階分布的ロバストナッシュ均衡であるとは，以下の条件がすべての $j \in \{1, \ldots, N\}$ について成り立つことである．

$$x_j^* \in \arg\max\{\Theta_j(x_j, x_{-j}^*) \mid x_j \in X_j\}$$
$$y_j^*(\xi) \in \arg\max\{\gamma_j(y_j(\xi), y_{-j}^*(\xi), x_j^*, x_{-j}^*, \xi) \mid y_j(\xi) \in Y_j(x_j^*, \xi)\} \quad \forall \xi \in \Xi$$

以後特に断らない限り，均衡解とは 2 段階分布的ロバストナッシュ均衡解を指すものとする．

以下の定理で均衡解が存在する条件を与える．

定理 2. すべての $j \in \{1, \ldots, N\}$ について以下のことが成り立つと仮定する．

1. θ_j は連続，かつ任意に固定した x_{-j} に対して凹関数
2. γ_j は連続，かつ任意に固定した $(y_{-j}(\xi), x_{-j})$ と $\xi \in \Xi$ に対して凹関数
3. X_j はコンパクト凸集合
4. Y_j は連続，かつ任意の $x_j \in X_j$ と $\xi \in \Xi$ に対して $Y_j(x_j, \xi)$ は凸集合
5. $\mathscr{P}_j$ は弱位相におけるコンパクト性をもつ

このとき，分布的ロバスト 2 段階確率非協力ゲームは定義 1 を満たす均衡解が存在する．

3. クールノー競争への応用

本節では，具体的な応用例として各プレイヤーが分布的ロバスト性を考慮しながら生産・供給段階で競合するクールノー競争を考える．

簡単のため，本発表では一種類の同質財における複占市場（$N = 2$）を考える．企業 j は第一段階で財の生産量 $x_j \in \mathbb{R}_+$ を決め，その生産コストを $\theta_j(x_j)$ とし単調非減少な凸関数（限界費用逓増の法則が成り立つ）とする．第二段階では，シナリオ $\boldsymbol{\xi} \in \Xi$ における供給量は x_j を超えない範囲内で $y_j(\boldsymbol{\xi}) \in \mathbb{R}_+$ を供給する．ここで，供給にかかるコストは $H_j(y_j(\boldsymbol{\xi}), \boldsymbol{\xi})$ とし θ_j 同様，単調非減少な凸関数する．需要は逆需要関数 $p(q(\boldsymbol{\xi}), \boldsymbol{\xi})$ のみで特徴づけられており，$q(\boldsymbol{\xi})$ に関して単調減少とする．ただし，$q(\boldsymbol{\xi}) := y_1(\boldsymbol{\xi}) + y_2(\boldsymbol{\xi})$ は市場に供給される財の総量とする．

企業 j は将来の需要に関する確率変数の分布は正確にわかっておらず，手持ちのデータから確率分布の不確実性集合 $\mathscr{P}_j$ を構築し，以下の 2 段階分布的ロバスト利益最大化を解くものとする．

$$\max_{x_j \geq 0} \{ \min_{P \in \mathscr{P}_j} \mathbb{E}_P[Q_j(x_j, \xi)] - \theta_j(x_j)\}$$

ただし，

$$Q_j(x_j, \boldsymbol{\xi}) := \max_{0 \leq y_j(\boldsymbol{\xi}) \leq x_j} p(q(\boldsymbol{\xi}), \boldsymbol{\xi}) y_j(\boldsymbol{\xi}) - H_j(y_j(\boldsymbol{\xi}), \boldsymbol{\xi})$$

このモデルでは各企業の第一段階の意思決定について，生産の上限制約（コンパクト性）を設けていないが，以下の命題の仮定が成り立てば，均衡解が存在することを示した．

命題 3. すべての企業について，ある $\bar{x}_j \geq 0$ と $P_j \in \mathscr{P}_j$ が存在し，以下の条件を満たす．

$$\mathbb{E}_{P_j}[p(y_j(\xi), \xi)] < \theta_j'(x_j) \quad (x_j \geq \bar{x}_j)$$
$$P_j \in \arg\min_{P \in \mathscr{P}_j} \mathbb{E}_P[Q_j(x_j, \xi)]$$

このとき，各企業は生産量の上限 $M_j \leq \bar{x}_j$ $(j = 1, 2)$ が存在する．

系 4. 命題 3 の仮定の下で，クールノー競争は定義 1 を満たす均衡解が存在する．

命題 3 はたとえ片方の企業が市場を独占していたとしても，限界費用 $\theta_j'(x_j)$ が $\bar{x}_j$ を境に，ワーストケース確率分布における限界収益の期待値を超えると，$\bar{x}_j$ より多く生産する動機をもたないことを示唆している．実際，命題 3 の仮定は限界費用逓増の法則が成り立つ市場では特別なことでない．

このモデルを例に，分布的ロバスト性が与える均衡解の特徴を数値実験を通して分析した．簡単に報告すると，分布不確実性集合が大きくなるほど，x_j が減少し，利得が小さくなるだけでなく，第二段階でどのシナリオに対しても x_j すべての量を供給する傾向にあることがわかった．これは保守性を考慮するほど企業は余剰 $x_j - y_j(\boldsymbol{\xi})$ を減らすことを示唆している．結果の詳細は当日報告する．

参考文献

[1] B. Li, J. Sun, H. Xu, M. Zhang: A class of two-stage distributionally robust games. *J. Ind. Manag. Optim.* 15, 387–400, 2019.

[2] Y. Liu, H. Xu, S.J.S. Yang, J. Zhang: Distributionally robust equilibrium for continuous games: Nash and Stackelberg models. *Euro. J. Oper. Res.* 265, 631–643, 2018.

[3] R.T. Rockafellar, R.J.B. Wets: Stochastic variational inequalities: single-stage to multistage. *Math. Program.* 165, 331–360, 2017.

[4] A. Shapiro, A. Nemirovski: On complexity of stochastic programming problems. In *Continuous optimization: current trends and modern applications* 111–146, Springer US, 2005.