日本オペレーションズ・リサーチ学会
2022年 秋季研究発表会

重み付き集合関係の順序構造について

05000720　秋田県立大学　*荒谷洋輔　ARAYA Yousuke

1.　はじめに

多目的最適化問題の拡張である集合最適化問題は、1997 年に黒岩-田中-Ha[7] によって提唱された。この問題は、集合値写像の像空間の元（集合）における大小の比較について 6 種類の順序を導入し、その順序による最適化問題を考えるというものである。近年では、**集合最適化問題が「多目的のロバスト最適化問題」に変換できることの発見 [6] などの重要な成果がある。**

発表者は、集合の非線形スカラー化手法の研究 [1, 2] を 2010 年代に進めてきた。本発表では、その応用として、重み付き集合関係 [4] について考察する。

2.　準備

本発表では、Y をノルム空間、$\mathbf{0}_Y$ を Y の原点とする。集合 $A \subset Y$ に対し、A の位相的内部、位相的閉包をそれぞれ $\mathrm{int}A$、$\mathrm{cl}A$ と表す。また、この論文で、$C \subset Y$ は閉凸錐を表すものとする。錐 $C \subset Y$ が solid とは $\mathrm{int}C \neq \emptyset$ を満たすことであり、pointed であるとは $C \cap (-C) = \{\mathbf{0}_Y\}$ が成立する場合である。

凸錐 $C \subset Y$ によってベクトル順序 $\leq_C$ が導入され、$(Y, \leq_C)$ は順序ベクトル空間となる。

$$\forall y_1, y_2 \in Y, \qquad y_1 \leq_C y_2 \overset{def}{\iff} y_2 - y_1 \in C$$

$\mathcal{V}$ を Y の空でない部分集合全体とする。$\alpha \in \mathbb{R}$、$V_1, V_2, V \in \mathcal{V}$ に対して、2 つの集合の和・スカラー積は以下のように定義される。

$$V_1 + V_2 := \{v_1 + v_2 \mid v_1 \in V_1, v_2 \in V_2\}$$

$$\alpha V := \{\alpha v \mid v \in V\}$$

定義 2.1 (集合関係：黒岩-田中-Ha[7])**.** $A,\, B \in \mathcal{V}$ と、solid な閉凸錐 $C \subset Y$ に対して、以下の集合関係を定義する。

$$[\textbf{lower}] \quad A \leq_C^l B \quad \text{by} \quad B \subset A + C$$

$$[\textbf{upper}] \quad A \leq_C^u B \quad \text{by} \quad A \subset B - C$$

$$A \leq_C^{l\&u} B \quad \text{by} \quad B \subset A + C \quad \text{and} \quad A \subset B - C$$

例 1. 集合の特別な場合として、「区間」を考える。

$$Y = \mathbb{R}, \quad C = \mathbb{R}_+ := \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\},$$

$$A = [a_1, a_2], \quad B = [b_1, b_2] \quad (a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{R})$$

このとき、$\leq_C^l$、$\leq_C^u$、$\leq_C^{l\&u}$ について次が分かる。

$$A \leq_C^l B \iff a_1 \leq b_1, \quad A \leq_C^u B \iff a_2 \leq b_2$$

$$A \leq_C^{l\&u} B \iff a_1 \leq b_1 \quad \text{and} \quad a_2 \leq b_2$$

命題 2.2 ([1])**.** $A, B, D \in \mathcal{V}$、$\alpha \geq 0$ に対して、次が成り立つ。

(i) $A \leq_C^{l\&u} B \quad \Longrightarrow \quad A \leq_C^l B$、

(ii) $A \leq_C^{l\&u} B \quad \Longrightarrow \quad A \leq_C^u B$、

(iii) $A \leq_C^l B$ と $A \leq_C^u B$ は比較できない、

(iv) $A \leq_C^{l[u]} B \quad \Longrightarrow \quad A + D \leq_C^{l[u]} B + D$、

(v) $A \leq_C^{l[u]} B \quad \Longrightarrow \quad \alpha A \leq_C^{l[u]} \alpha B$、

(vi) $\leq_C^l$ と $\leq_C^u$ は、反射律と推移律が成り立つ。

定義 2.3 (C-proper)**.** $A \in \mathcal{V}$ が C-proper $[(-C)$-proper$]$ であるとは、$A + C \neq Y [A - C \neq Y]$ が成り立つときである。また、$\mathcal{V}_C [\mathcal{V}_{-C}]$ を Y の C-proper $[(-C)$-proper$]$ である部分集合の族とする。

定義 2.4 (C-closed：Luc[8])**.** $A \in \mathcal{V}$ が C-closed $[(-C)$-closed$]$ であるとは、$A + C$ $[A - C]$ が閉集合であることと定義する。

3.　重み付き集合関係

3.1.　ベクトルのスカラー化関数

この節では $k^0 \in \mathrm{int}C$ とする。Gerstewitz は、1983 年に以下の非線形スカラー化関数を提案した。$\varphi_{C,k^0} : Y \to (-\infty, \infty]$

$$\varphi_{C,k^0}(y) = \inf\{t \in \mathbb{R} \,\big|\, y \in tk^0 - C\}$$

[5] では、Gerstewitz の関数の性質（順序保存性・劣線形性など）が詳細に調べられている。また、上記の関数は、以下の双対形に変形できる。$\psi_{C,k^0} : Y \to [-\infty, \infty)$

$$\psi_{C,k^0}(y) = \sup\{t \in \mathbb{R} \,\big|\, y \in tk^0 + C\}$$

$$\varphi_{C,k^0}(y) = -\psi_{C,k^0}(-y)$$

これらの関数は、Pareto 最適解（多目的のある種の最小解）の特徴づけなど、多目的最適化問題において幅広い応用を持つ ([5, 8] 参照)。

3.2. 集合のスカラー化関数

集合の非線形スカラー化関数についての研究（$\varphi_{C,k^0}, \psi_{C,k^0}$ の拡張）は 2000 年代初頭の田中-Georgiev から始まり、2000 年代後半に重要な研究があった（詳細は [1, 2] 参照）。$\inf \emptyset = \infty$ と $\sup \emptyset = -\infty$ を認めることにより、

$$h^l_{\mathrm{inf}}, h^u_{\mathrm{inf}}, h^l_{\mathrm{sup}}, h^u_{\mathrm{sup}} : \mathcal{V} \times \mathcal{V} \to [-\infty, \infty]$$

を次で定義する。$h^l_{\mathrm{inf}}, h^u_{\mathrm{inf}}, h^l_{\mathrm{sup}}, h^u_{\mathrm{sup}}$ は、経済学における効用関数の役割を果たしている。

$$h^l_{\mathrm{inf}}(V_1, V_2) = \inf\{t \in \mathbb{R} \,|\, V_1 \leq^l_C tk^0 + V_2\}$$

$$h^u_{\mathrm{inf}}(V_1, V_2) = \inf\{t \in \mathbb{R} \,|\, V_1 \leq^u_C tk^0 + V_2\}$$

$$h^l_{\mathrm{sup}}(V_1, V_2) = \sup\{t \in \mathbb{R} \,|\, tk^0 + V_2 \leq^l_C V_1\}$$

$$h^u_{\mathrm{sup}}(V_1, V_2) = \sup\{t \in \mathbb{R} \,|\, tk^0 + V_2 \leq^u_C V_1\}$$

4 つの非線形スカラー化関数は、ある種の双対性を持っている（[1] 参照)。

$$h^l_{\mathrm{sup}}(V_1, V_2) = -h^u_{\mathrm{inf}}(-V_1, -V_2)$$

$$h^u_{\mathrm{sup}}(V_1, V_2) = -h^l_{\mathrm{inf}}(-V_1, -V_2)$$

定理 3.1 (集合関係とスカラーの変換定理 [2]). $C \subset Y$ を *solid* な閉凸錐、$k^0 \in \mathrm{int}C$ とする。すると、次が言える。

(i) $V_1 \in \mathcal{V}_C$ が C-*closed*、 $V_2 \in \mathcal{V}$ ならば、

$$V_2 \subset V_1 + C \Longleftrightarrow h^l_{\mathrm{inf}}(V_1, V_2) \leq 0、$$

(ii) $V_1 \in \mathcal{V}$、$V_2 \in \mathcal{V}_{-C}$ が $(-C)$-*closed* ならば、

$$V_1 \subset V_2 - C \Longleftrightarrow h^u_{\mathrm{inf}}(V_1, V_2) \leq 0。$$

3.3. 重み付き集合関係

前述の l 型・u 型の集合関係に依らない解の概念を定式化することを考える。重み付き集合関係 [4] は、この新しい順序関係にあるパラメーターを制御することによって、実務家が l 型・u 型両方の間をスムーズに移行する（最悪または最良の場合）ことが可能になる。

定義 3.2 (Chen-Köbis-Köbis-Yao [4]). $C \subset Y$ を solid な閉凸錐、$\lambda \in [0, 1]$、$k^0 \in \mathrm{int}C$ とする。A, $B \in \mathcal{V}$ に対して、次の集合関係を定義する。

$$A \preceq^{\lambda,k^0}_{\mathrm{inf}} B \iff \lambda h^l_{\mathrm{inf}}(A, B) + (1-\lambda) h^u_{\mathrm{inf}}(A, B) \leq 0$$

$$A \prec^{\lambda,k^0}_{\mathrm{inf}} B \iff \lambda h^l_{\mathrm{inf}}(A, B) + (1-\lambda) h^u_{\mathrm{inf}}(A, B) < 0$$

[4] では、重み付き集合関係の順序構造を調査し、さらには新たな最適解の概念を提唱している。

本発表では [3] の成果として、重み付き集合関係の新たな性質について紹介する。

参考文献

[1] Y. Araya, *Four types of nonlinear scalarizations and some applications in set optimization*, Nonlinear Anal. 75 (2012) 3821–3835.

[2] Y. Araya, *Existence theorems of cone saddle-points in set optimization applying nonlinear scalarizations*, Linear Nonlinear Anal. 6 (2020) 13–33.

[3] Y. Araya, *On the ordinal structure of the weighted set relation*, Nihonkai Math. J. 32 (2021) 91–105.

[4] J. Chen, E. Köbis, M. A. Köbis, J. Yao, *A new set order relation in set optimization*, J. Nonlinear Convex Anal. 18 (2017) 637–649.

[5] A. Göpfert, H. Riahi, C. Tammer, and C. Zălinescu *Variational methods in partially ordered spaces*, Springer-Verlag, New York (2003).

[6] J. Ide, E. Köbis, D. Kuroiwa, A. Schöbel, C. Tammer, *The relationship between multi-objective robustness concepts and set-valued optimization*, Fixed Point Theory Appl. (2014), 2014:83, 20.

[7] D. Kuroiwa, T. Tanaka, and T.X.D. Ha, *On cone convexity of set-valued maps*, Nonlinear Anal. 30 (1997) 1487–1496.

[8] D. T. Luc, *Theory of vector optimization*, Lecture Notes in Econom. and Math. Systems, 319, Springer-Verlag, Berlin (1989).