

貴金属比の類似比によるテオドロスの螺旋や等角螺旋の芸術的&幾何学的再考

01405264 大阪工業大学
非会員 大阪工業大学*中西 真悟
藤村 真生NAKANISHI Shingo
FUJIMURA Masao

1. はじめに

本研究では, OR 研究発表会[1-5], EURO2021 のセッション「OR と芸術, 創造性」[6], 大阪工業大学イノベーションデイズ 2020, 2021, 2022[7-9], 大阪工業大学紀要[10,11]を基に貴金属比の類似比に関する新たな観点からの等角螺旋の提案を行っている. 図1に示す個性ある三角形としてケプラー三角形, 直角二等辺三角形, 正三角形等を用いた同一焦点の楕円と等角螺旋の幾何学的関係を再考するために一般化されたフィボナッチ数列とその固有値により

$$F_{(a,b),0} = 0, F_{(a,b),1} = 1, \quad (1)$$

$$F_{(a,b),j} = a \cdot F_{(a,b),j-1} + b \cdot F_{(a,b),j-2} \quad (j \geq 2)$$

$$\lambda_{(a,b)}^{j+2} = a \cdot \lambda_{(a,b)}^{j+1} + b \cdot \lambda_{(a,b)}^j \quad (j \in \mathbb{Z})$$

が描く等角螺旋をこれまで幾何学的に考察した. 中でも, 図1に示す黄金比の連分数の拡大解釈と多重根号の表現は美しかったので, 今回は例示している.

2. ケプラー三角形で構成される直方体の応用

これまでの研究成果は平面図形として考察してきたが, 2つのケプラー三角形を用いて立体構造を考えたとき, その直方体を本研究ではケプラー直方体として重視する(黄金直方体と呼ばれることがある). $n=1$ ではケプラー直方体を考え, $n=2$ では立方体となる立体構造の対角線の二乗式が重要である. これらの対角線の長さをピタゴラスの定理により

$$1^2 + \sqrt{\left(\frac{1}{\phi}\right)^2} + \left(\frac{1}{\phi}\right)^2 = 1 + 1 \quad (2)$$

$$1^2 + \sqrt{\left(\frac{n}{\lambda_{(1,n)}}\right)^2} + \left(\frac{n}{\lambda_{(1,n)}}\right)^2 = n + 1 \quad (3)$$

もしくは

$$\lambda_{(1,n)}^j + n\lambda_{(1,n)}^{j-1} + n^2\lambda_{(1,n)}^{j-2} = (n+1)\lambda_{(1,n)}^j \quad (4)$$

と表記できる直方体に注目する. $n=1$ のとき, 立体構造に式(2)が示す直角三角形は直角を挟む二辺の長さが1である直角二等辺三角形となるため, その斜辺の長さは $\sqrt{2}$ である. このことはあまり知られていない. この考え方を基準に, 式(2)が示す $n=2$ のときの立方体では, 直角を挟む二辺の長さが1と $\sqrt{2}$

で A4 サイズの長方形を対角線で分けた直角三角形を示すことができるため, その斜辺の長さは $\sqrt{3}$ である. すなわち, この考え方に従う直角三角形のそれぞれの辺の長さは, 直角を挟む二組の辺の長さが1と $\sqrt{n}$ で構成され, その斜辺の長さが $\sqrt{n+1}$ である. したがって, 図2に示すようにこれはテオドロスの螺旋を構成する直角三角形を意味している.

3. 螺旋階段による等角螺旋の視覚化

螺旋階段による等角螺旋は, 3方向を (u, v, w) で表す媒介変数表示では

$$\begin{cases} u = \sqrt{\lambda_{(1,n)}}^x \cos\left(\arccos\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda_{(1,n)}}}\right)x\right) \\ v = \sqrt{\lambda_{(1,n)}}^x \sin\left(\arccos\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda_{(1,n)}}}\right)x\right) \\ w = \left(\sqrt{\lambda_{(1,n)}} + 1\right)\left(\sqrt{\lambda_{(1,n)}}^x - 1\right) \end{cases} \quad (5)$$

と表記できる. すなわち, 図3左側のように図示できる($n=1,2,3$). このときの直方体は2章で説明した貴金属比の類似比による直方体が基準となる. したがって, ケプラー直方体は今回の発表で重要な意味を有することがわかる. 同様に, 図3右側にはこの直方体の対角線を活かした等角螺旋を図示している. 当日の発表では, CGの専門家である共同研究者の藤村の等角螺旋階段の作品も活用し, 詳細を解説する.

参考文献

- [1] 中西真悟, 2021年OR学会春季研究発表会予稿集, 2-E-10, (2021)
- [2] 中西真悟, 2021年OR学会春季研究発表会予稿集, 2-E-11, (2021)
- [3] 中西真悟, 2021年OR学会秋季研究発表会予稿集, 1-D-2, (2021).
- [4] 中西真悟, 2022年OR学会春季研究発表会予稿集, 2-E-9, (2022).
- [5] 中西真悟, 2022年OR学会春季研究発表会予稿集, 2-E-10, (2022).
- [6] Shingo Nakanishi, "Visualizations of discrete equiangular spirals based on similar metallic ratios using Pythagorean theorem and weighted Fibonacci sequences", EURO2021, No.936, (2021)
- [7] 中西真悟, 大阪工業大学イノベーションデイズ2020, (2020).
- [8] 中西真悟, 大阪工業大学イノベーションデイズ2021, (2021).
- [9] 中西真悟, 大阪工業大学イノベーションデイズ2022, (2022).
- [10] 中西真悟, "ピタゴラスの定理と標準正規分布に基づく螺旋および等角図の幾何学的考察 — 三角形と正方形や貴金属比の類似比によるアプローチ —", 大阪工業大学図書館紀要, Vol. 65, No. 2, pp.103-127, (2021).
- [11] 中西真悟, "一般化されたフィボナッチ数列とピタゴラスの定理と二項定理を用いた貴金属比の類似比に関する等角螺旋の芸術的可視化と幾何学的特性", 大阪工業大学図書館紀要, (印刷中), (2022).

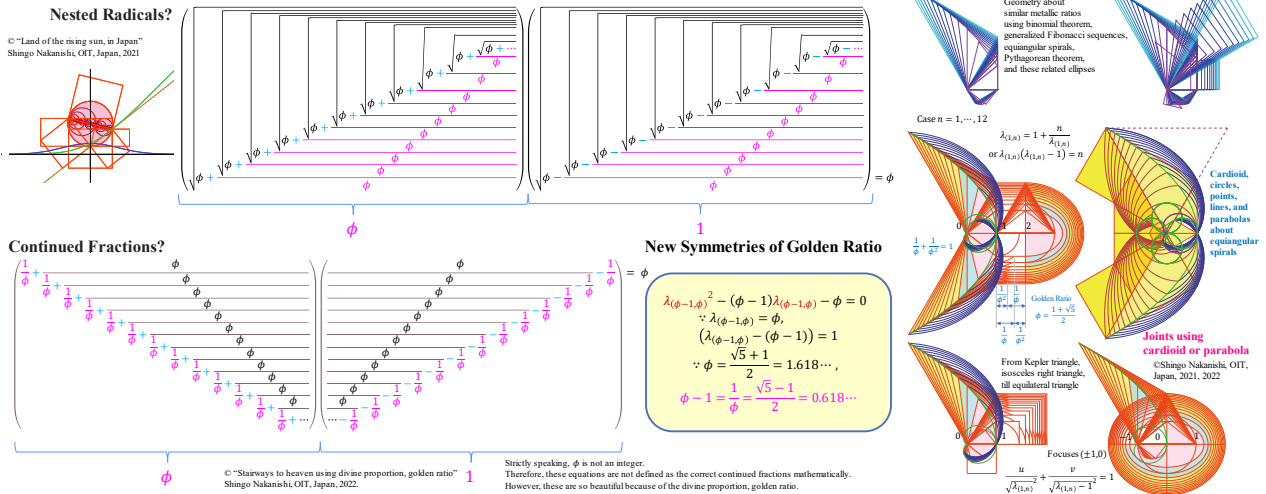


図1 黄金比による黄金比の連分数の拡大解釈と多重根号表記, ピタゴラスの定理と二項定理と同一焦点の楕円による等角螺旋の考え方

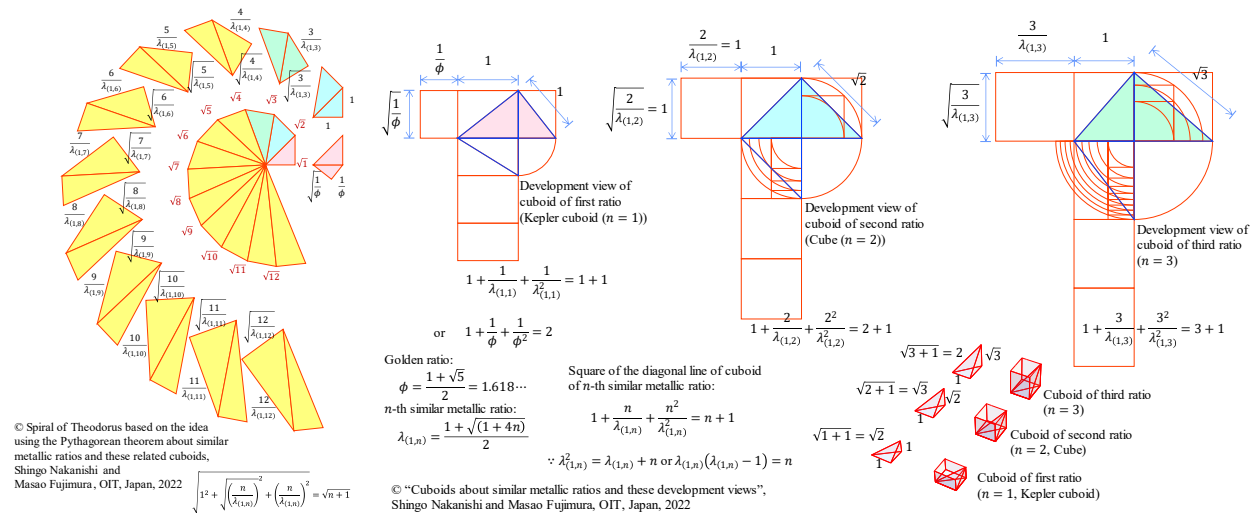


図2 ケプラー直方体, 立方体など貴金属比の類似比による直方体の展開図とこれらによるテオドロスの螺旋の視覚化

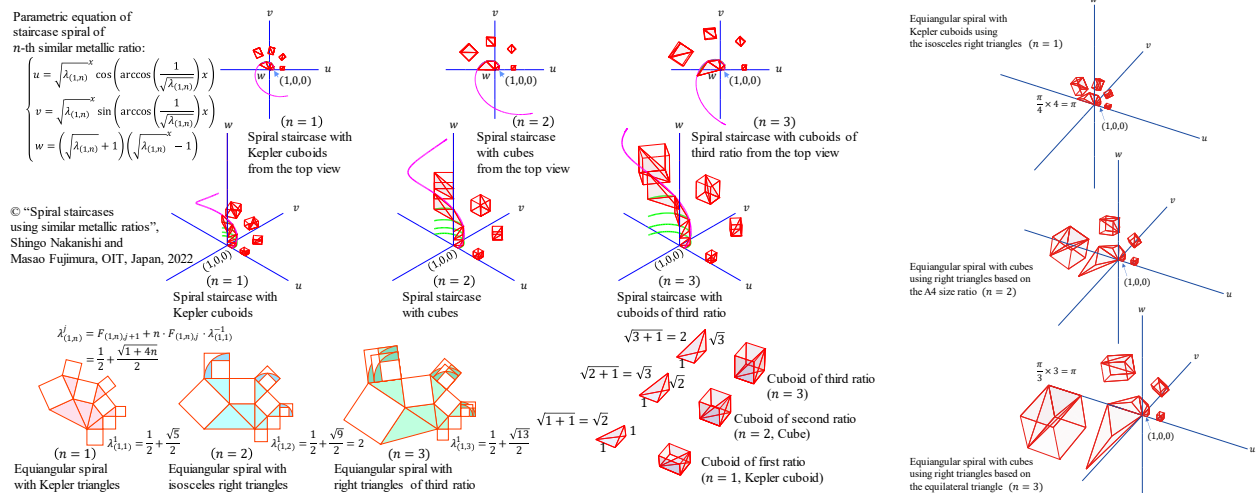


図3 貴金属比の類似比による螺旋階段の視覚化例, その直方体を活用した空間上の等角螺旋の視覚化例