

複数の情報ソースをもつブロッキングサーバにおける Age of Information の同時分布解析

東京工業大学 *小野寺大毅 ONODERA Daiki
05000656 東京工業大学 矢島萌子 YAJIMA Moeko
01605720 東京工業大学 三好直人 MIYOSHI Naoto

1. はじめに

Age of Information (AoI) は、リアルタイム性を要求される情報更新システムにおいて、情報の鮮度を評価するための指標として広く用いられている。

本研究では、1つのブロッキングサーバを複数の情報ソースが共有するときの AoI を解析する。具体的には、定常状態における各ソースの AoI のラプラス変換、および全ソースの AoI の同時ラプラス変換を導出する。そして、これらの解析結果を応用して、2ソースでの各 AoI の相関係数の挙動を数値計算によって示す。

2. システム設定と Age of Information

K 個の情報ソースが1つのサーバにパケットを送信し、サーバがそのパケットを処理し、完了すると直ちにパケットを送信したソースに対応するモニタの情報が更新されるシステムを考える。

本研究では、サーバがブロッキング規律で動作する場合を考える。すなわち、パケットを処理中のサーバに到着したパケットは破棄される。破棄されることなくモニタに反映されるパケットを有効パケットと呼ぶことにする。ソース k の n 番目の有効パケットの処理完了時刻（モニター更新時刻）を $U_{k,n}$ 、 n 番目の有効パケットがソース k から送信されてからモニタが更新されるまでにかかった時間（システム遅延）を $D_{k,n}$ とすれば、ソース k の AoI は、以下の時刻 t に関する区分線形関数として定義される。

$$A_k(t) = D_{k,n} + t - U_{k,n}, \quad t \in [U_{k,n}, U_{k,n+1})$$

3. 点過程モデリング

点過程の理論を用いて上記のシステムをモデリングすることを考える。モデリング方法の詳細については [2] を参照せよ。また、点過程に関する詳しい解説は [1] を参照せよ。

ソース全体の集合を $\mathcal{K} = \{1, 2, \dots, K\}$ とし、全ソースの処理完了時刻の列を $\{U_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ 、システム遅延の列を $\{D_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ 、有効パケットのソース番号の列を $\{C_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ とし、ソース k のサービス完了時刻の点過程を

$$\Psi_k(B) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \mathbf{1}_{\{k\}}(C_n) \mathbf{1}_B(U_n), \quad B \in \mathcal{B}$$

とする。このとき、 $\Psi = \sum_k \Psi_k$ は全ソースのサービス完了時刻の点過程になる。

次にパケット送信時刻列に関する点過程を定義する。 $\{T_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ を全ソースでのパケット送信時刻列とする。この列にはサーバにブロックされたパケットの送信時刻が含まれていることに注意せよ。 $\{T_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ のソースの種類の列を $\{c_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ 、要求サービス時間列を $\{S_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ とし、ソース k のパケット送信時刻列の点過程を

$$\Phi_k(B) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \mathbf{1}_{\{k\}}(c_n) \mathbf{1}_B(T_n), \quad B \in \mathcal{B}$$

とする。 $\Phi = \sum_k \Phi_k$ は全ソースでのパケット送信時刻列の点過程となる。

4. M/G/1/1 ブロッキングサーバでのマルチソース AoI 解析

点過程 $\Phi_1, \dots, \Phi_K$ をそれぞれ有限な強度 $\lambda_1, \dots, \lambda_K$ をもつ独立な定常ポアソン過程とする。このとき、 Φ は強度 $\lambda = \sum_k \lambda_k$ を持つポアソン過程となる。さらに要求サービス時間は独立に定まり、ソースごとに同じ分布に従うとする。この仮定のもとで、 $A_k(t)$ は定常である。

ソース k の AoI のラプラス変換を $\mathcal{L}_{A_k}(s) = \mathbb{E}[e^{-sA_k(0)}]$ とし、 $\mathcal{L}_{S,k}(s) = \mathbb{E}[e^{-sS_0} | c_0 = k]$ 、 $\mathcal{L}_S(s) = \mathbb{E}[e^{-sS_0}]$ とすれば、以下の関係式が成り立つ。

Theorem 1 (ソース k の AoI のラプラス変換)

$$\mathcal{L}_{A_k}(s) = \frac{\lambda_k}{1 + \lambda \mathbb{E}[S_0]} \times \frac{\mathcal{L}_{S,k}(s)(s + \lambda - \lambda \mathcal{L}_S(s))}{s(s + \lambda - \lambda \mathcal{L}_S(s) + \lambda_k \mathcal{L}_{S,k}(s))} \quad (1)$$

以下のように記号を定義する.

- $j[k] = \{j_k, \dots, j_K\} \subset \mathcal{K}$
- $\underline{j}[k] = \mathcal{K} \setminus j[k+1] = \{j_1, \dots, j_k\}$
- $\sigma[\mathcal{K}]$ を $\mathcal{K}$ の並び替え全体
- $H \subset \mathcal{K}$ に対して $\bar{s}_H = \sum_{i \in H} s_i$
- $\mathbf{s} = (s_1, \dots, s_K)$
- $\mathcal{L}_{\mathbf{A}}(\mathbf{s}) = \mathbb{E}[\exp(-\sum_{k=1}^K s_k A_k(0))]$

さらに, $H \subset \mathcal{K}$ に対して

$$\mathcal{L}_{S,H}(s) = \frac{1}{\lambda_H} \sum_{k \in H} \lambda_k \mathcal{L}_{S,k}(s)$$

とする. このとき, 以下の関係式が成り立つ.

Theorem 2 (同時ラプラス変換)

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\mathbf{A}}(\mathbf{s}) &= \frac{\lambda_1 \dots \lambda_K}{1 + \lambda \mathbb{E}[S_0]} \frac{\lambda + \bar{s} - \lambda \mathcal{L}_S(\bar{s})}{\bar{s}(\lambda + \bar{s})} \\ &\times \sum_{(j_1, \dots, j_K) \in \sigma[\mathcal{K}]} \mathcal{L}_{S,j_K}(s_{j_K}) \\ &\times \prod_{k=1}^{K-1} \frac{\mathcal{L}_{S,j_k}(\bar{s}_{j[k]})}{\lambda + \bar{s}_{j[k+1]} - \bar{\lambda}_{\underline{j}[k]} \mathcal{L}_{S,\underline{j}[k]}(\bar{s}_{j[k+1]})} \end{aligned} \quad (2)$$

5. 相関係数解析

(1), (2) 式を用いると, 各ソースの AoI の相関係数を得ることができる. この解析結果を利用して, $\mathcal{K} = \{1, 2\}, \mathcal{L}_{S,1} = \mathcal{L}_{S,2} = \mathcal{L}_S$ の場合の相関係数を数値実験により計算する.

要求サービス時間分布が指数分布 $Exp(\mu)$, ガンマ分布 $Gamma(\mu, \alpha)$ に従うとき, すなわち

- $\mathcal{L}_S(s) = (1 + s/\mu)^{-1}$ (指数分布)
- $\mathcal{L}_S(s) = (1 + s/\mu)^{-\alpha}$ (ガンマ分布)

であるとき, 要求サービス時間の期待値, および λ_2 と相関係数との関係は, 図 1, 図 2 のようになる. ここで, 縦軸が相関係数である.

図より, 正の相関を持つ状況が存在することがわかる. また, 要求サービス時間分布がガンマ分布

であるとき, α が増加すれば, 相関係数は減少すると予想できる.

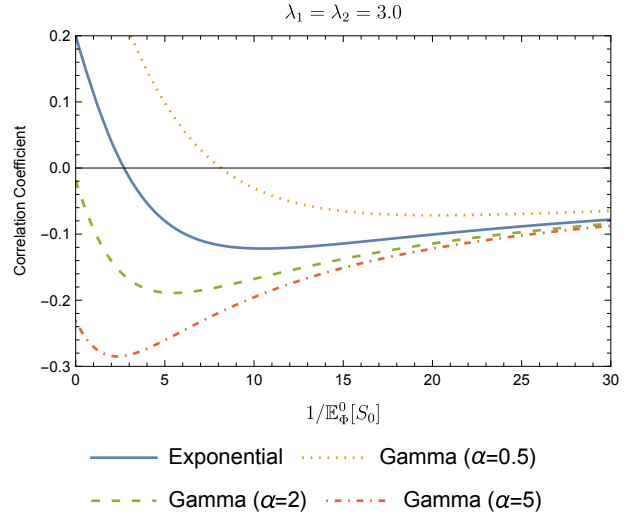


図 1: 要求サービス時間の期待値と相関係数の関係

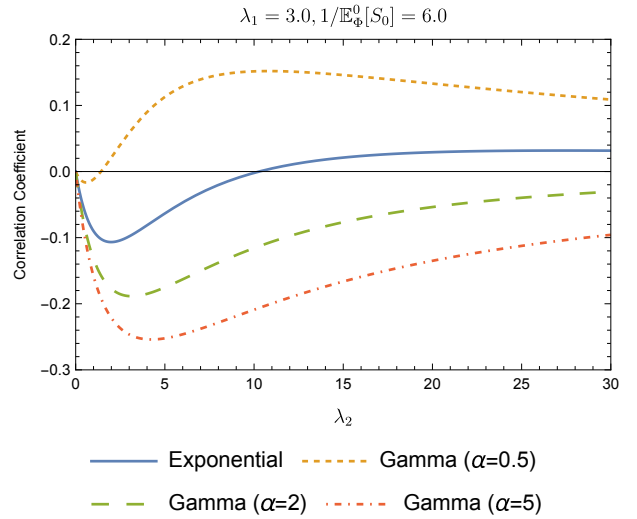


図 2: ソース 2 のパケットの到着率 λ_2 と相関係数の関係

参考文献

- [1] F. Baccelli and P. Brémaud. Elements of Queueing Theory: Palm-martingale Calculus and Stochastic Recurrences. Springer, 2003.
- [2] Y. Jiang and N. Miyoshi. Joint performance analysis of ages of information in a multi-source pushout server. IEEE Transactions on Information Theory, vol. 68, pp. 965–975, 2022.