忍耐時間付き確率的マッチングモデルの解析

05001606　東京工業大学　*阿部寛人　ABE Hiroto
05000656　東京工業大学　矢島萌子　YAJIMA Moeko
01605720　東京工業大学　三好直人　MIYOSHI Naoto

1　はじめに

確率的マッチングモデルは，顧客が確率的に到着するマッチングモデルである．到着時にマッチングできるタイプの顧客がシステム内に存在すればその顧客とともにシステムを去り，存在しない場合にはシステム内で待つ．近年，タイプ間のマッチングに関する制約を無向非二部グラフで記述した確率的マッチングモデルが研究されている [1,2,3]．このモデルは順序独立損失待ち行列 (OI-Loss 待ち行列) に帰着できることが示されている [4]．

本稿では，確率的マッチングモデルに忍耐時間を付与した忍耐時間付き確率的マッチングモデル (SMMI : Stochastic Matching Model with Impatience) を解析する．SMMI が OI-Loss 待ち行列に帰着されることを述べ，その事実を利用して顧客数に関する定常分布などを導出する．

2　SMMI の設定

N 種類のタイプ $1, 2, \dots, N$ の顧客が到着するマッチングモデルを考える．タイプ i の顧客は率 α_i の定常ポアソン過程に従って到着し，互いに独立の平均 $1/\theta_i$ の指数分布に従う忍耐時間を持つ．マッチング規律は FCFM (First Come First Match) である．

各タイプの顧客がどのタイプの顧客とマッチングできるかは，自己ループを持たない無向グラフにより決定する．グラフの頂点集合を $\mathcal{V} = \{1, 2, \dots, N\}$ とし，頂点 $i, j \in \mathcal{V}$ が辺を持つとき $i \sim j$ と記す．この無向グラフで $i \sim j$ ならば，タイプ i と j の顧客はマッチング可能である．図 1 は SMMI のマッチングを表す無向グラフの例である．図 1 の例では，タイプ 1 の顧客はタイプ 2 と 3 とマッチングできるが，タイプ 4 とはマッチングできない．

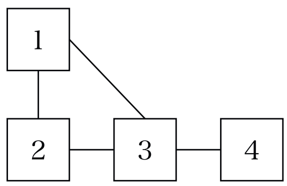

図 1: SMMI のマッチングを表す無向グラフ

時刻 t のシステム内の顧客数を $N(t)$ とする．時刻 t において p 番目に古い顧客のタイプを $C_p(t)$ として，システム状態を $X(t) := (C_1(t), C_2(t), \dots, C_{N(t)}(t))$ と表す．ただし，$N(t) = 0$ のとき $X(t) = \varnothing$ とする．システム状態 $X(t)$ は $\mathcal{V}$ の有限列からなる集合 $\mathcal{V}^\star$ に属するが，$X(t)$ は $\mathcal{V}^*$ 上のすべての値をとるわけではない．例えば，$i \sim j$ を満たすタイプ $i, j \in \mathcal{V}$ の顧客は同時にシステムに存在できない．この制限された集合を $\mathcal{C}$ と記す．

システム状態 $X(t)$ は到着間隔と忍耐時間が指数分布に従うことから，確率過程 $\{X(t)\}$ は $\mathcal{C}$ 上の連続時間マルコフ連鎖であることは明らか

である．

3 SMMI の解析

3.1 OI-Loss 待ち行列への帰着

OI-Loss 待ち行列とは, 複数のタイプの顧客が率 $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_N)$ の定常ポアソン過程で到着し, システム状態に応じて特定のタイプの顧客はシステムに入らず退去する待ち行列で, システム状態の順序に依存しない退去率関数 $\mu\colon \mathcal{C} \to \mathbb{R}^+$ をもつ．詳しくは，[4] 内の Definition 1 を参照せよ．OI-Loss 待ち行列は積形式解をもつことが知られている．

[4] で確率的マッチングモデルを OI-Loss 待ち行列に帰着して解析したのと同様に，SMMI も OI-Loss 待ち行列に帰着できる．到着率 λ を $\lambda = \alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N)$，退去率関数 μ を

$$\mu(c) = \alpha(\mathcal{E}(\mathcal{V}(c))) + \sum_{i \in \mathcal{V}} |c|_i \theta_i, \quad c \in \mathcal{C}$$

とおけば，SMMI が OI-Loss 待ち行列に帰着できることが分かる．ここで，$|c|_i$ は状態 c に存在するタイプ i の顧客数，$\alpha(\mathcal{E}(\mathcal{V}(c)))$ は状態 c のシステム内に存在する顧客とマッチング可能な顧客の到着率の和とする．

3.2 性能指標の導出

SMMI が OI-Loss 待ち行列に帰着できることを利用して，システムの状態を表す連続時間マルコフ連鎖 $\{X(t)\}$ の定常分布を求める．

定理 3.1. SMMI のシステムの状態を表す連続時間マルコフ連鎖 $\{X(t)\}$ の定常分布を $\pi(c)$，$c \in \mathcal{C}$ と記す．各 $c = (c_1, c_2, \dots, c_m) \in \mathcal{C}$ に対して，$\pi(c)$ は以下の通り．

$$\pi(c) = \pi(\varnothing)\Phi(c) \prod_{p=1}^{m} \alpha_{c_p},$$

$$\Phi(c) = \prod_{p=1}^{m} \Bigg(\alpha(\mathcal{E}(\mathcal{V}(c_1, \dots, c_p)) + \sum_{i \in \mathcal{V}} |(c_1, \dots, c_p)|_i \theta_i \Bigg)^{-1}.$$

ここで, $\pi(\varnothing)$ は, $\sum_{c \in \mathcal{C}} \pi(c) = 1$ を満たす値.

定常な SMMI のシステム内に滞在するタイプ i の顧客数を X_i と表し, タイプ i の顧客の滞在時間の確率変数を T_i と表す．X_i と T_i のモーメントは以下のように得られる.

系 3.2. $i \in \mathcal{V}$ と $n = 1, 2, \dots$ に対して, $\mathcal{C}_i = \{c \in \mathcal{C};\ |c|_i > 0\}$, $\pi(\mathcal{C}_i) = \sum_{c \in \mathcal{C}_i} \pi(c)$ とすると, タイプ i の顧客数 X_i の n 次モーメントは以下の通り.

$$E[X_i^n] = \alpha_i^n \frac{\partial^n \pi(\mathcal{C}_i)}{\partial \alpha_i^n}.$$

系 3.3. $i \in \mathcal{V}$ と $n = 1, 2, \dots,$ に対して, タイプ i の顧客の滞在時間 T_i の n 次モーメントは以下の通り.

$$E[T_i^n] = \frac{1}{\alpha_i^n} \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n+k} s(n,k) \alpha_i^k \frac{\partial^k \pi(\mathcal{C}_i)}{\partial \alpha_i^n}.$$

ここで, $s(n,k)$ は第一種スターリング数.

参考文献

[1] J. Mairesse, P. Moyal, Stability of the stochastic matching model, J. Appl. Probab. vol. 53, no, 4, 1064-1077, 2016.

[2] A. Cadas, J. Doncel, J-M. Fourneau, A. Busic, Flexibility can hurt dynamic matching system performance, Perform. Eval. Rev. vol. 49, no. 3, 351-378, 2021.

[3] P. Moyal, A. Busic, J. Mariesse, A product form the general stochastic, J. Appl. Probab. vol. 58, no. 2, 449-468, 2021.

[4] C. Comte, Stochastic non-bipartite matching models and order-independent loss queues, Stoch. Models. vol. 38, no.1, 1-36, 2022.