日本オペレーションズ・リサーチ学会
2022年 秋季研究発表会

割り込みを考慮したErlang Bモデルの漸近解析

05001604　筑波大学　*安部 和真　ABE Kazuma
02992304　筑波大学　フンドック トゥアン　PHUNG-DUC Tuan

1.　はじめに

本研究ではErlang Bモデルを拡張した, 割り込みのあるモデル [3] の解析を拡散極限を用いて行う．Erlang BモデルとはAgner K. Erlang (1878-1929, デンマーク) によって考案された M/M/c/c 待ち行列を指し, コールセンターのエージェント配置や通信基地局の設計など, 多くの分野で応用されている．また, M/M/c/c 待ち行列における呼損率の式はErlang B式と呼ばれている．

今回は2種類の客が存在するモデルを検討する．種類1の客の到着時に全てのサーバーが使用されている場合, 種類1の客はすでにサーバーを使用している種類2の客のサービスに割り込むことができる．　そして種類2の客の処理は中断され, センシングプールと呼ばれる仮想待合室に入る．このモデルはコグニティブ無線ネットワークに由来し, テーマパークやオンライン予約の優先チケットなどで類似したユーザーの動きが見られる．

コグニティブ無線ネットワークとは情報通信における帯域幅不足を解決するための技術で, これまでに多くの研究が行われてきた. [4] はセンシングプールのサイズを有限と仮定したモデルの解析を行った. [3] はセンシングプールのサイズを無限にしたときの安定条件件を導出した．

待ち行列理論における拡散近似を用いた研究はこれまでに多く行われている．代表的な研究として [1, 5] が挙げられる. [2] では特性関数を用いて拡散極限を導出している．

2.　モデル

種類1と種類2の客はそれぞれパラメータ λ_1, λ_2 のPoisson過程に従ってシステムに到着し, サーバーが空いている場合, 種類1の客はパラメータ μ_1 の指数分布に従う時間で処理が行われる．種類2の客はシステムに到着した後にセンシングプールに滞在する．センシングプールから種類2の客はパラメータ σ の指数分布に従う時間でセンシングを行い, 利用可能なサーバーが存在するときはそのサーバーを使用し, パラメータ μ_2 の指数分布に従う時間で処理が行われる．すべてのサーバーが使用されている場合, 種類2の客は再度センシングを行う．種類1の客がシステムに到着した際, すべてのサーバーが使用されており, かつ そのうちの1台のサーバーを種類2の客が使用していた場合, その種類1の客は種類2の客の処理を停止させ, 割り込むことができる．割り込まれた種類2の客はセンシングプールに戻り, 再度センシングを行う．

3.　解析の方法

はじめに, 以下の変数を定義する．

- $n_1(t)$: 時刻 t でサーバーを使用している種類1の客数,
- $n_2(t)$: 時刻 t でサーバーを使用している種類2の客数,
- $i(t)$: 時刻 t でセンシングプールに滞在している種類2の客数.

このとき, $\{(n_1(t), n_2(t), i(t)) \mid t \geq 0\}$ は3次元マルコフ連鎖になる．本研究の目標は $(n_1(t), n_2(t))$ の分布とセンシングプールに滞在している種類2の客数 $i(t)$ の離散確率分布を導出することである．しかしながら, 3次元マルコフ連鎖を厳密に解析することは一般的に困難である．そのため, 本研究では [2] で $\sigma \to 0$ とした場合に $\sigma i(\frac{\tau}{\sigma})$ が決定過程 $x(\tau)$ に収束することを利用して解析を行う．ここで, $x(\tau)$ に関する微分方程式は

$$\frac{dx(\tau)}{d\tau} = a(x(\tau))$$

である．ここで,

$$a(x) = \lambda_1 \boldsymbol{S_1 R}(x) + \lambda_2 - x\boldsymbol{S_2 R}(x). \qquad (1)$$

を表しており,

$$\boldsymbol{S_1 R}(x) := \sum_{\substack{n_1+n_2=c \\ n_2 \geq 1}} R(n_1, n_2, x),$$

$$\boldsymbol{S_2 R}(x) := \sum_{n_1+n_2 \leq c-1} R(n_1, n_2, x).$$

また, 簡単のため, $x(\tau)$ を x とした. $R(n_1, n_2, x)$ は $\sigma \to 0$ としたときの $(n_1(t), n_2(t))$ の結合確率になる. これはそれぞれ種類 1 の客の到着率 λ_1, センシングを行わない種類 2 の客の到着率 x の Poisson 過程 でシステムに到着するモデルの定常確率を表している.

また, $\frac{1}{\sqrt{\sigma}}\{\sigma i(\frac{\tau}{\sigma}) - x(\tau)\}$ が拡散過程に収束するという結果から, $i(t)$ の定常分布の近似が得られる.

以上の手順から, $x(\tau)$ を計算することにより $i(t)$ の期待値や分布の近似を求めることができる.

4. 主な結果

本節では以下の 2 つの定理を証明する. 定理 1 では [3] で得られた安定条件の十分性が $\lim_{x\to\infty} a(x) < 0$ と同値であることを証明する.

また, 先行研究 [2] などで $i(t)$ の定常分布を近似するために, $a(x) = 0$ の解 κ を必要としているが, その解の一意性は証明されていない. そこで, その一意性を定理 2 として示す.

定理 1 (安定条件)**.**

$\lim_{x\to\infty} a(x) < 0$ であることと, [3] で得られた安定条件

$$\frac{\lambda_2}{\mu_2} < \sum_{i=0}^{c} (c - i)\pi_i \tag{2}$$

は同値である. ただし,

$$\pi_i = \frac{\frac{\lambda_1^i}{i!\mu_1^i}}{\sum_{k=0}^{c} \frac{\lambda_1^k}{k!\mu_1^k}}, \ i = 0, 1, \ldots, c.$$

Proof. x を十分大きくすると, すべてのサーバーが使用されるようになるので,

$$\lim_{x\to\infty} \sum_{n_1+n_2=c} R(n_1, n_2, x) = 1. \tag{3}$$

(3) と $R(n_1, n_2, x)$ が満たす平衡方程式を用いて,

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty} x\boldsymbol{S_2}\boldsymbol{R}(x) &= \sum_{n_1+n_2=c} (n_1\mu_1 + n_2\mu_2)R(n_1, n_2) \\ &= \sum_{n_1=0}^{c} (n_1\mu_1 + (c - n_1)\mu_2)\, \pi_{n_1}.\end{aligned}$$

(1) に代入すると定理 1 が得られる. □

定理 2 (一意性)**.**

システムが定理 1 の安定条件を満たすとき, $a(x) = 0$ の解が一意に存在する.

Proof. 定理 2 を示すためには $a(x)$ が x に対して単調減少であることを示せば良い.

(1) を変形すると,

$$\begin{aligned} a(x) =& \lambda_1\{1 - \boldsymbol{S_2}\boldsymbol{R}(x) - \pi_c\} + \lambda_2 - x\boldsymbol{S_2}\boldsymbol{R}(x) \\ =& \lambda_1(1 - \pi_c) + \lambda_2 - (\lambda_1 + x)\boldsymbol{S_2}\boldsymbol{R}(x). \end{aligned} \tag{4}$$

ここで, $R(c, 0, x) = \pi_c$ とした. (4) の第 1, 2 項は x に依存しない定数, 第 3 項は稼働中のサーバー数を増加させる率, すなわちシステムから出ていく率 (スループット) と等しいため, x に対して単調増加となる. よって, $a(x)$ の単調性が示される. □

5. 結論

本研究では Erlang B モデルを拡張した割り込みのあるシステムに関して拡散極限を用いた解析を行い, 2 つの定理を証明した. 今後の課題として, 種類 2 がセンシング終了時にサーバーがすべて使用されている場合, 確率 p でセンシングプールに戻り, 確率 $1 - p$ でシステムから離脱するモデルの解析を検討している.

参考文献

[1] S. Halfin and W. Whitt. Heavy-traffic limits for queues with many exponential servers. *Operations Research*, 29(3):567–588, 1981.

[2] A. Nazarov, A. Moiseev, T. Phung-Duc, and S. Paul. Diffusion limit of multi-server retrial queue with setup time. *Mathematics*, 8(12):2232, 2020.

[3] T. Phung-Duc, K. Akutsu, K. Kawanishi, O. Salameh, and S. Wittevrongel. Queueing models for cognitive wireless networks with sensing time of secondary users. *Annals of Operations Research*, 310(2):641–660, 2022.

[4] O. Salameh, K. De Turck, H. Bruneel, C. Blondia, and S. Wittevrongel. Analysis of secondary user performance in cognitive radio networks with reactive spectrum handoff. *Telecommunication Systems*, 65(3):539–550, 2017.

[5] W. Whitt. Efficiency-driven heavy-traffic approximations for many-server queues with abandonments. *Management Science*, 50(10):1449–1461, 2004.