

CVaR レシオ最大化に基づく 分布的ロバストポートフォリオ選択問題について

申請中 慶應義塾大学 *赤沼陽太郎 AKANUMA Yotaro
01406032 慶應義塾大学 成島康史 NARUSHIMA Yasushi

1. はじめに

近年、分布的ロバスト最適化が盛んに研究されており、それらの結果に基づいたポートフォリオ選択問題もいくつか提案されている。例えば、[1]では分布的ロバスト最適化に基づくシャープレシオやオメガレシオを最大化するポートフォリオ選択問題が提案されている。しかしながら、収益率の真の分布の実現値については既知であるとの仮定を置いているという弱点がある。

本発表では、先行研究 [1] のモデルの拡張として収益率の真の分布の実現値を確率変数、そのサポート集合を楕円集合として取り扱い、リスク指標として理想的な性質であるコヒーレント性を有する条件付き VaR (以下、 $CVaR$) を用いたレシオ [2] 最大化モデルを提案する。このレシオを用いることで、下方リスクとリターンの両方を意思決定に反映することが可能である。

2. 分布的ロバスト最適化

分布的ロバスト最適化では真の分布を含む不確実性集合を $\mathcal{D}$ として表し、その集合に含まれる確率分布 $\mathbb{P}$ に対する最悪ケースの期待コストを最小化する問題で、一般的に以下のように表される：

$$\min_x \max_{\mathbb{P} \in \mathcal{D}} \mathbb{E}^{\mathbb{P}}[f(x, Y)].$$

ただし、 $\mathbb{E}^{\mathbb{P}}[f(x, Y)]$ は確率分布 $\mathbb{P}$ におけるコスト関数 $f(x, Y)$ の期待値を表し、 x を決定変数、 Y を確率変数とする。分布的ロバスト最適化では考える不確実性集合 $\mathcal{D}$ (通常は凸性を仮定する) は以下のような分布 $\mathbb{P}$ の経験分布 $\hat{\mathbb{P}}$ からの差を測るダイバージェンス d を用いて以下で定義される：

$$\mathcal{D}(\epsilon) = \{\mathbb{P} : d(\mathbb{P} | \hat{\mathbb{P}}) \leq \epsilon\}.$$

ここで、 ϵ は不確実性の大きさを表す定数である。近年、このダイバージェンス d として、Wasserstein 距離という輸送問題に着想を得た分布間の距離尺

度を用いたロバスト最適化が盛んに研究されている。この Wasserstein 距離の利点は、連続分布を扱える点であり、その柔軟性から本発表でもこの Wasserstein 距離をダイバージェンス d として用いることとする。

3. 問題の定式化

対象資産全体の集合を $[m] := \{1, 2, \dots, m\}$ 、各資産に対する投資比率をまとめた決定変数ベクトルを $x \in \mathbb{R}^m$ 、 $\xi \in \mathbb{R}^m$ を分布 $\mathbb{P}$ に従う各資産の収益率を表す確率変数とする。標本数を $[n] := \{1, 2, \dots, n\}$ とし、 $\hat{\xi}^j \in \mathbb{R}^m$ を収益率の標本データとする。以下では、経験分布は $\hat{\mathbb{P}}_n(\xi) := \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \delta_{\hat{\xi}_j}$ で表されるものと仮定する。ただし、 $\delta_{\hat{\xi}_j}$ はディラック分布を表すものとする。

また、損失関数を $-x^T \xi$ とし、確率水準 $\alpha \in (0, 1)$ の下での $CVaR$ を $CVaR_{\alpha}(-x^T \xi)$ で表すと、本研究で扱う $CVaR$ レシオ最大化問題は以下で与えられる：

$$\begin{aligned} \max \quad & \beta, \\ \text{s.t.} \quad & \frac{\mathbb{E}^{\mathbb{P}}[x^T \xi]}{CVaR_{\alpha}(-x^T \xi)} \geq \beta, \\ & \beta \in \mathbb{R}_+. \end{aligned}$$

以下では、 $CVaR_{\alpha}(-x^T \xi) > 0$ と $\beta > 0$ を仮定し、分母を払った問題を考える。さらに、その問題において、分布 $\mathbb{P} \in \mathcal{D}$ ($\mathcal{D}$ は不確実性集合) を仮定したときのロバスト最適化問題は以下で与えられる：

$$\begin{aligned} \max \quad & \beta, \\ \text{s.t.} \quad & \sup_{\mathbb{P} \in \mathcal{D}} \{CVaR_{\alpha}(-x^T \xi) - \frac{1}{\beta} \mathbb{E}^{\mathbb{P}}[x^T \xi]\} \leq 0, \\ & \beta \in \mathbb{R}_+. \end{aligned}$$

さらに、 $CVaR$ の定義より、 $CVaR_{\alpha}(-x^T \xi) = \min_{e \in \mathbb{R}} \{e + \frac{1}{\alpha} \mathbb{E}^{\mathbb{P}}[\max\{-x^T \xi - e, 0\}]\}$ であるため、上記の問題は以下のように書き換えられる：

$$\max \quad \beta,$$

$$\begin{aligned} \text{s.t. } \min_{e \in \mathbb{R}} e + \sup_{\mathbb{P} \in \mathcal{D}} E^{\mathbb{P}}[h(x, e, \xi)] &\leq 0, \\ \beta &\in \mathbb{R}_+. \end{aligned} \quad (1)$$

ただし, $h(x, e, \xi) = \max\{-\left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}\right)x^T \xi - \frac{e}{\alpha}, -\frac{1}{\beta}x^T \xi\}$ とする. 以下では, 問題 (1) における部分問題 $\sup_{\mathbb{P} \in \mathcal{D}} E^{\mathbb{P}}[h(x, e, \xi)]$ を考える. 以降では, 具体的な定式化のため, 次を仮定する.

仮定 1 集合 Ξ によってサポートされる空間 $\mathcal{M}(\Xi)$ に従う任意の確率分布 $\mathbb{P}$ について, 以下の条件を満たすものとする.

$$\mathbb{E}^{\mathbb{P}}[\|\xi\|_p] = \int_{\Xi} \|\xi\|_p \mathbb{P}(d\xi) < \infty.$$

定義 1 仮定 1 が満たされるとき, Wasserstein 距離は以下で定義される [3]:

$$\begin{aligned} d(\mathbb{P}_1 | \mathbb{P}_2) &:= \inf \left\{ \int_{\Xi \times \Xi} d(\xi_1 | \xi_2) K(d\xi_1, d\xi_2) : \right. \\ &\left. \int_{\Xi} K(\xi_1, d\xi_2) = \mathbb{P}_1(\xi_1), \int_{\Xi} K(d\xi_1, \xi_2) = \mathbb{P}_2(\xi_2) \right\}, \end{aligned}$$

ここで, $K: \Xi \times \Xi \rightarrow \mathbb{R}_+$ は $\mathbb{P}_1 \in \mathcal{M}(\Xi)$ と $\mathbb{P}_2 \in \mathcal{M}(\Xi)$ の結合確率分布を表し, $d(\xi_1 | \xi_2) = \|\xi_1 - \xi_2\|$ とする. このとき, Wasserstein 距離を用いると, 部分問題 $\sup_{\mathbb{P} \in \mathcal{D}} E^{\mathbb{P}}[h(x, e, \xi)]$ は以下の式 (2) に再定式化される:

$$\begin{aligned} \max_{K(\xi, \hat{\xi}^j) \geq 0} & \sum_{j=1}^n \int_{\Xi} h(x, e, \xi) K(d\xi, \hat{\xi}^j), \\ \text{s.t. } & \int_{\Xi} K(d\xi, \hat{\xi}^j) = \frac{1}{n}, \quad \forall j = [n], \\ & \sum_{j=1}^n \int_{\Xi} d(\xi | \hat{\xi}^j) K(d\xi, \hat{\xi}^j) \leq \epsilon. \end{aligned} \quad (2)$$

ここで, サポート集合 Ξ に関しては, 区間型や楕円型を考慮することができるが, 今回は紙面の都合上, 楕円型のみを記載する. よって, 以下では, $\Xi = \{\xi | \xi = \bar{\xi} + Q\Delta, \|\Delta\|_2 \leq \rho\}$ とする. ここで, $Q \in \mathbb{R}^{m \times m}$ は正定値行列, $\Delta \in \mathbb{R}^m$, $\bar{\xi} \in \mathbb{R}^m$ を過去の平均収益率ベクトル, ρ を正の定数とする. このとき, 部分問題 (2) の双対問題を考えることで, 問題 (1) は以下のように再定式化される:

$$\begin{aligned} \max_{x, e, s, \lambda, z, t} & \beta, \\ \text{s.t. } & e + \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n s_j + \lambda \epsilon \leq 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_j^T z_{1j} - \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}\right) x^T \bar{\xi} - \frac{e}{\alpha} + t_{1j} \rho &\leq s_j, \quad \forall j = [n], \\ b_j^T z_{2j} - \frac{1}{\beta} x^T \bar{\xi} + t_{2j} \rho &\leq s_j, \quad \forall j = [n], \\ -A^T z_{1j} &= c_{1j}, \quad -A^T z_{2j} = c_{2j}, \quad \forall j = [n], \\ \sum_{i=1}^m x_i &= 1, \quad x \geq 0, \quad \lambda \geq 0, \quad \beta \in \mathbb{R}_+, e \in \mathbb{R}, \\ z_{1j}, z_{2j} &\in \mathbb{K}^{1+m} \times \mathbb{K}^{1+m}, \quad t_{1j}, t_{2j} \geq 0, \quad \forall j = [n]. \end{aligned} \quad (3)$$

ただし, $\mathbb{K}^{1+m} = \{z = (z_0, \bar{z}) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m | z_0 \geq \|\bar{z}\|\}$,

$$\begin{aligned} c_{1j} &= \begin{pmatrix} -t_{1j} \\ -\lambda \\ -\left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}\right) Q^T x \end{pmatrix}, \quad c_{2j} = \begin{pmatrix} -t_{2j} \\ -\lambda \\ -\frac{1}{\beta} Q^T x \end{pmatrix}, \quad \forall j = [n] \\ A &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0^T \\ 0 & 0 & Q \\ 1 & 0 & 0^T \\ 0 & 0 & I \end{pmatrix}, \quad b_j = \begin{pmatrix} 0 \\ \bar{\xi} - \hat{\xi}^j \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \forall j = [n] \end{aligned}$$

とする.

問題 (3) は非凸最適化問題であり, 一般的には大域的最適解を求めることは難しい. しかし, β を定数として扱えば, 問題 (3) は凸最適化問題となるため, 最適解における β の値を含むような区間を考え, 逐次, β を固定した問題 (3) を解くような 2 分探索法を用いることで大域的最適解を求めることが可能である. 2 分探索法の詳細は [1] を参照されたい.

参考文献

- [1] M.A. Lejeune and R. Ji, Data-driven optimization of reward-risk ratio measures, *INFORMS Journal on Computing*, **33** (2021), 1120–1137.
- [2] S. Lin and M. Ohnishi, Optimal portfolio selection by Cvar based sharpe ratio -genetic algorithm approach-, *Scientiae Mathematicae Japonicae Online*, (2006), 1229–1251.
- [3] Z. Wanga, K. Youa, S. Songa, and Y. Zhang, Wasserstein distributionally robust shortest path problem, *European Journal of Operational Research*, **284** (2020), 31–43.