

一般状態空間モデルを活用した Mean-Variance ポートフォリオ

明治大学先端数理科学研究科 *田中 蓮 TANAKA Ren
01013460 明治大学総合数理学部 乾 孝治 INUI Kouji

1. はじめに

資産運用における資産配分最適化の考え方として平均分散法 (Mean-Variance, MV) はよく用いられる. MV では、投資資産収益率の期待値及び共分散行列をインプットとして投資家の効用関数を最大化するように資産配分を決定する. しかし、これらのインプット (特に期待収益率) を過去データから正しく推定することが困難であるため、MV がうまく機能しないという問題点がある.

上記のような課題に対し、時系列モデルをポートフォリオ最適化に応用した先行研究がいくつか存在する. 例えば、中野ほか (2017) は国内外の株式及び債券、リートの収益率に対し、期待リターンとボラティリティの時系列構造を仮定した SMSV (Stochastic Mean Stochastic Volatility) を状態空間モデルとして推定し、ポートフォリオ最適化に活用している. その結果、過去データを用いる通常の MV よりもパフォーマンスが大きく改善されることを示した.

今回、国内株式 (TOPIX-17) を対象に、状態空間モデルを活用した MV の有効性を検証する. 使用するモデルは、中野ほか (2017) が提案した SMSV に加え、CAPM を状態空間モデルとして表現したモデルを取り扱う. また、モデルの推定には粒子フィルタを用いた.

2. 理論

2.1. CAPM(資本資産価格モデル)

CAPM は、リスク資産とマーケットポートフォリオの超過リターンの関係を表したモデルである.

$$E[r] - r_f = \beta_{MKT}(E[r_M] - r_f)$$

ただし、 r, r_f, r_M はそれぞれリスク資産、無リスク資産、マーケットの収益率、 β_{MKT} はリスク資産のマーケットへの感応度を表す.

2.2. 状態空間モデル

状態空間モデルは、観測方程式と状態方程式の 2 式から成るモデルである.

$$\begin{aligned} y_t &\sim p(y_t|x_t, \theta) \\ x_t &\sim p(x_t|x_{t-1}, \theta) \end{aligned}$$

ただし、 x_t と y_t はそれぞれ時刻 t での状態変数と観測値であり、 θ はパラメータである.

上記の 2 式がともに線形性とガウス性を満たすものは線形・ガウス型状態空間モデル、そうでないものは一般状態空間モデルに大別される.

2.3. 粒子フィルタ

粒子フィルタは一般状態空間モデルの推定アルゴリズムであり、状態変数の確率分布を次式のように多数の状態の実現値 (粒子) とその重みで近似する手法である.

$$p(x) \simeq \sum_{n=1}^N w_n \delta(x - x_n)$$

ここで、 $\delta(\cdot)$ はディラックのデルタ関数、 w_n は n 番目の粒子 x_n の重みを表す.

状態の推定では、各時刻での状態の事前分布・事後分布を逐次的に求めていく. 粒子フィルタではこれらの分布は以下のように近似できる.

$$\begin{aligned} p(x_t|y_{1:t-1}) &\simeq \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \delta(x_t - x_{t|t-1}^{(n)}) \\ p(x_t|y_{1:t}) &\simeq \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \delta(x_t - x_{t|t}^{(n)}) \end{aligned}$$

ただし、 $y_{1:t}$ は時刻 t までの観測値の集合、 $x_{t|t-1}^{(n)} \sim p(x_t|x_{t-1|t-1}^{(n)})$ ($x_{t-1|t-1}^{(n)}$ は時刻 $t-1$ の事後分布を構成する n 番目の粒子)、 $x_{t|t}^{(n)}$ は $\{x_{t|t-1}^{(m)}\}_{m=1}^N$ を尤度 $p(y_t|x_{t|t-1}^{(m)})$ に応じてリサンプリングしたときの n 番目の粒子を表す.

パラメータ推定については、最尤法による推定が困難であるため、パラメータも状態変数としてベイズ推定する自己組織化が一般的に用いられる.

例えば、Liu and West(2001) が提案したパラメータに適切な正規ノイズを加えて推定するカーネル平滑化法などがある。

3. 推定する各種モデル

以下、 $r_t, r_{f,t}, MKT_t$ は時刻 t でのリスク資産、無リスク資産、マーケットの収益率を表す。

モデル 1: SMSV モデル

$$\begin{aligned} r_t &= \mu_t + \exp\left(\frac{x_t}{2}\right)\epsilon_t & \epsilon_t &\sim N(0, 1) \\ x_t &= \bar{x} + \phi_x x_{t-1} + \sigma_x \xi_t & \xi_t &\sim N(0, 1) \\ \mu_t &= \bar{\mu} + \phi_\mu \mu_{t-1} + \sigma_\mu \eta_t & \eta_t &\sim N(0, 1) \end{aligned}$$

ただし、 $Cov(\epsilon_{t-1}, \xi_t) = \rho$

モデル 2: CBCV モデル

$$r_t - r_{f,t} = \beta_{MKT} MKT_t + \sigma \epsilon_t \quad \epsilon_t \sim N(0, 1)$$

モデル 3: SBCV モデル

$$\begin{aligned} r_t - r_{f,t} &= \beta_{MKT,t} MKT_t + \sigma \epsilon_t & \epsilon_t &\sim N(0, 1) \\ \beta_{MKT,t} &= \bar{\beta} + \phi_\beta \beta_{MKT,t-1} + \sigma_\beta \eta_t & \eta_t &\sim N(0, 1) \end{aligned}$$

モデル 4: CBSV モデル

$$\begin{aligned} r_t - r_{f,t} &= \beta_{MKT} MKT_t + \exp\left(\frac{x_t}{2}\right)\epsilon_t & \epsilon_t &\sim N(0, 1) \\ x_t &= \bar{x} + \phi_x x_{t-1} + \sigma_x \xi_t & \xi_t &\sim N(0, 1) \end{aligned}$$

ただし、 $Cov(\epsilon_{t-1}, \xi_t) = \rho$

モデル 5: SBSV モデル

$$\begin{aligned} r_t - r_{f,t} &= \beta_{MKT,t} MKT_t + \exp\left(\frac{x_t}{2}\right)\epsilon_t & \epsilon_t &\sim N(0, 1) \\ x_t &= \bar{x} + \phi_x x_{t-1} + \sigma_x \xi_t & \xi_t &\sim N(0, 1) \\ \beta_{MKT,t} &= \bar{\beta} + \phi_\beta \beta_{MKT,t-1} + \sigma_\beta \eta_t & \eta_t &\sim N(0, 1) \end{aligned}$$

ただし、 $Cov(\epsilon_{t-1}, \xi_t) = \rho$

4. 数値実験

4.1. 使用データ

データは以下の 3 種類を用いた。

- TOPIX17 配当込み指数月末終値の 1993 年 8 月～2022 年 3 月のデータを収益率に変換したもの (QUICK 社の Astra Manager より取得)。
- リスクフリーレートとして、無担保コールレート 1ヶ月物・月末値を使用 (日本銀行のサイトから取得)。
- マーケットリターンの月次データ (French 氏のサイトから取得し、為替データで円ベースに変換)。

4.2. モデルの推定

推定は次のように行なった。

- 粒子フィルタを用いてモデルを推定。
- 粒子数は 15 万。
- パラメータの推定値には、各時刻のパラメータに関する粒子の平均値を使用。

4.3. ポートフォリオシミュレーション

投資家のリスク回避度をいくつか想定した上で、過去データを用いた通常の MV 及び上述したモデルを用いた MV について、そのパフォーマンスを検証する。

モデルを使用する場合の期待リターン及びボラティリティについて、SMSV ではリターンに関する粒子の平均値・標準偏差を使用。一方、CAPM に関するモデルでは、SMSV で推定したマーケットの期待リターンとボラティリティを用いてモデル式より推定する。また、相関行列の推定については、前者のモデルは過去データを使用し、後者はモデル式を用いる。

なお、シミュレーション結果等の詳細については学会にて報告する。

参考文献

- [1] Kitagawa, G.(1996). "Monte Carlo filter and smoother for non-Gaussian nonlinear state space models", Journal of computational and graphical statistics, 5(1), 1-25.
- [2] Kitagawa, G.(1998). "A self-organizing state-space model", Journal of the American Statistical Association, 1203-1215.
- [3] Liu, J., West, M.(2001). "Combined parameter and state estimation in simulation-based filtering", Sequential Monte Carlo Methods in Practice(pp. 197-223), Springer New York.
- [4] Markowitzs, H.(1952). "Portfolio Selection", The Journal of Finance, 7, 77-91.
- [5] 中野雅史・佐藤整尚・高橋明彦・高橋聡一郎 (2017) 「粒子フィルタを用いたポートフォリオ最適化」, 経済学論集 81-2.