

L₂ 凸集合の多面体表現

01606770 東京都立大学

*森口聡子 MORIGUCHI Satoko

01603194 統計数理研究所・東京都立大学

室田一雄 MUROTA Kazuo

1. はじめに

離散凸解析 [4] の研究では、種々の離散凸性が定義され、いくつかの離散凸集合の多面体表現が知られている。ここで、「離散凸集合の多面体表現」とは、離散凸集合の凸包の不等式系による表現のことである。このような表現は、多面体的組合せ論と呼ばれる組合せ最適化の標準的なアプローチの基礎となるものである。

L 凸集合、L^h 凸集合、M 凸集合、M^h 凸集合に対しては多面体表現が知られている。M₂ 凸集合、M₂^h 凸集合に対しても、ポリマトロイド交差に対応することから、多面体表現が知られている。マルチモジュラ集合についても最近になって多面体表現が明らかになった [2]。

一方、2つのL 凸集合のミンコフスキー和であるL₂ 凸集合に対しては、多面体表現に関する結果がわからずに残されていた。本研究では、L₂ 凸集合の多面体表現を明らかにするとともに、自然なグラフ表現を導く。

既知の事実本研究の結果を加えてまとめると、表1のようになる。なお、整凸集合 [4, Sec. 3.4] に対しては多面体表現に関する有用な議論はできないことに注目されたい ($\{0, 1\}$ ベクトルからなる任意の集合は整凸集合であり、したがって、任意の $\{0, 1\}$ 多面体は整凸集合の凸包である)。

2. 結果

L 凸集合は離散凸解析の枠組みにおける基本的な凸集合の一つである。非空集合 $S (\subseteq \mathbb{Z}^n)$ が次の二つの条件を満たすとき、L 凸集合であると定義される：

$$\begin{aligned} x, y \in S &\implies x \vee y, x \wedge y \in S, \\ x \in S, \mu \in \mathbb{Z} &\implies x + \mu \mathbf{1} \in S. \end{aligned}$$

ここで $\mu \in \mathbb{R}$ と置き換えることによって、L 凸多面体が定義される。

非空集合 $S \subseteq \mathbb{Z}^n$ は、2つのL 凸集合のミンコフスキー和（ベクトル和）で表現できるとき、すなわち、 $S = \{y + z \mid y \in S_1, z \in S_2\}$ で、 S_1 と S_2 がL

表 1: 離散凸集合の多面体表現

	$\langle a, x \rangle \leq b$ のベクトル a	Ref.
Box	$\pm e^i$	自明
L 凸	$e^j - e^i$	[4, Sec.5.3]
L ^h 凸	$e^j - e^i, \pm e^i$	[4, Sec.5.5]
L ₂ 凸	$e^J - e^I$ ($ I = J $)	本研究
L ₂ ^h 凸	$e^J - e^I$ ($ I - J = 0, \pm 1$)	本研究
M 凸	$e^I, -e^N (= -\mathbf{1})$	[4, Sec.4.4]
M ^h 凸	$\pm e^I$	[4, Sec.4.7]
M ₂ 凸	$e^I, -e^N (= -\mathbf{1})$	M 凸より
M ₂ ^h 凸	$\pm e^I$	M ^h 凸より
マルチモジュラ	$\pm e^I$ (I : 連続区間)	[2]

(注) $N = \{1, 2, \dots, n\}$ とする。 $i, j \in N$ とし、 $I, J \subseteq N$ とする。

凸集合であるとき、L₂ 凸集合という [4, Sec. 5.5].
なお、 S_1, S_2 がL^h 凸のとき、 S をL₂^h 凸集合という。同様に、多面体 $P \subseteq \mathbb{R}^n$ は2つのL 凸 (L^h 凸) 多面体のミンコフスキー和で表現できるとき、L₂ 凸 (L₂^h 凸) 多面体という。

L 凸集合はL₂ 凸集合であるが、逆は真でない。同様に、L^h 凸集合はL₂^h 凸集合であるが、逆は真でない。L₂ 凸集合はL₂^h 凸集合である。

定理 2.1. L₂ 凸集合 $S \subseteq \mathbb{Z}^n$ は、 (I, J) によって添字づけられた適当な $\gamma_{IJ} \in \mathbb{Z} \cup \{+\infty\}$ に対して

$$S = \{x \in \mathbb{Z}^n \mid x(J) - x(I) \leq \gamma_{IJ}\}$$

$$\forall (I, J) (|I| = |J|, I \cap J = \emptyset) \quad (1)$$

と表現できる。なお、L₂^h 凸集合は、上式で「 $|I| = |J|$ 」の部分で「 $|I| - |J| \in \{-1, 0, 1\}$ 」と置き換えればよい。L₂ 凸多面体 $P \subseteq \mathbb{R}^n$ は、 (I, J) によって添字づけられた適当な $\gamma_{IJ} \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ に対して

$$P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x(J) - x(I) \leq \gamma_{IJ}\}$$

$$\forall (I, J) (|I| = |J|, I \cap J = \emptyset)$$

と表現できる。

この結果に対する2つの異なる証明を与えた。一つは共役性定理やM₂ 最適性規準といった離散凸

解析の構造的結果を用いた証明である．もう一つは代数的な直接証明であり，構成する L 凸集合の多面体表現の不等式系にフーリエ・モツキンの消去法を適用したもので， L 凸集合と三角不等式の関係という基本的事実だけを用いる初等的な証明である．

定理 2.1 は， L_2^b 凸かつ M_2^b 凸である整数ベクトルの集合は Box （整数区間）だけであるという基本的な事実 [5] の別証明を導くなど，離散凸解析における新たな示唆を与える．

なお，マトロイド交差において一つの共通基に隣接する共通基が指数個になりうることで， M_2 凸と L_2 凸の共役性より， L_2 凸集合を表現する不等式の個数は指数個になりうることを示されている．

グラフ表現について述べる．式 (1) の (I, J) は，グラフ上の有向閉路に対応する．例で示すと，

$$S_1 = \{y \in \mathbb{Z}^4 \mid y_2 - y_1 \leq 3, y_3 - y_2 \leq 5, y_4 - y_3 \leq 8, y_1 - y_4 \leq 7\},$$

$$S_2 = \{z \in \mathbb{Z}^4 \mid z_1 - z_3 \leq 2, z_4 - z_1 \leq 1, z_2 - z_3 \leq 3, z_4 - z_2 \leq 5, z_3 - z_4 \leq 2\}.$$

で定義される L_2 凸集合 $S = S_1 + S_2$ に対して， S_1, S_2, S に対応するグラフは図 1 の通りである． S の不等式表現は

$$\begin{aligned} x_1 - x_3 &\leq 17, & x_1 - x_4 &\leq 11, \\ x_2 - x_1 &\leq 9, & x_2 - x_3 &\leq 21, & x_2 - x_4 &\leq 15, \\ x_3 - x_1 &\leq 11, & x_3 - x_2 &\leq 12, & x_3 - x_4 &\leq 17, \\ x_4 - x_1 &\leq 17, & x_4 - x_2 &\leq 18, & x_4 - x_3 &\leq 11, \\ x_2 + x_4 - x_1 - x_3 &\leq 15 \end{aligned}$$

であり， $x_2 + x_4 - x_1 - x_3 \leq 15$ は混合閉路 $C = (1, 2)_1(2, 3)_2(3, 4)_1(4, 1)_2$ に対応する．

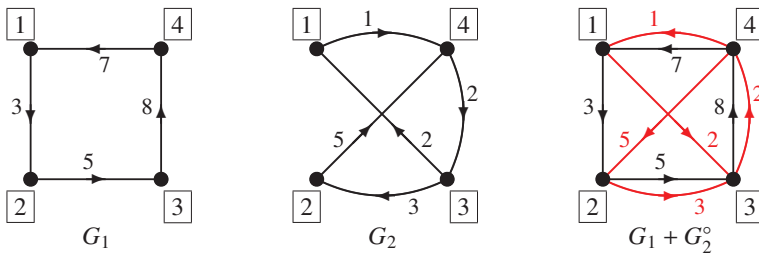


図 1: 例の L_2 凸集合に対応するグラフ

次に box-TDI [1] に関する結果を述べる．線形不等式系 $Ax \leq b$ が完全双対整数性を持つ（TDI である）とは， A と b の要素が有理数であり，線形計画問題の双対性

$\max\{w^T x \mid Ax \leq b\} = \min\{y^T b \mid y^T A = w^T, y \geq 0\}$ において，右辺の最小化問題が（その最適値が有限であるような）任意の整数ベクトル w に対して整数最適解 y をもつことと定義される．線形不等式系 $Ax \leq b$ が box-TDI であるとは，不等式系 $[Ax \leq b, d \leq x \leq c]$ が任意の有理数（有限値）ベクトル c と d に対して TDI であることと定義される． box-TDI である不等式系で記述される多面体は box-TDI 多面体と呼ばれる．

定理 2.2. L_2 凸多面体は box-TDI 多面体である．より一般に， L_2^b 凸多面体は box-TDI 多面体である．

謝辞: 本研究は JSPS/MEXT 科研費 (JP20K11697, JP17K00037, JP21K04533) の助成を受けた．

参考文献

- [1] Edmonds, J., Giles, R.: Total dual integrality of linear inequality systems. In: Pulleyblank, W. R. (ed.) Progress in Combinatorial Optimization, pp. 117–129. Academic Press, (1984)
- [2] Moriguchi, S., Murota, K.: Inclusion and intersection relations between fundamental classes of discrete convex functions. arXiv: <https://arxiv.org/abs/2111.07240> (2021)
- [3] Moriguchi, S., Murota, K.: Note on the polyhedral description of the Minkowski sum of two L -convex sets. Japan J. Indust. Appl. Math. DOI: <https://doi.org/10.1007/s13160-022-00512-3> (2022)
- [4] Murota, K.: Discrete Convex Analysis. SIAM (2003)
- [5] Murota, K., Shioura, A.: Relationship of M -/ L -convex functions with discrete convex functions by Miller and by Favati–Tardella. Disc. Appl. Math. **115**, 151–176 (2001)