1-B-8

日本オペレーションズ・リサーチ学会
2022年 秋季研究発表会

ジャンプシステムおよびデルタマトロイド上の最適化問題に対する測地線アルゴリズムの構築

05000741　東京都立大学　*南川 智都　MINAMIKAWA Norito

1.　はじめに

Bouchet と Cunningham [1] が提案したジャンプシステムは，デルタマトロイドや双劣モジュラ多面体の一般化となる概念である．本稿では以下のジャンプシステム上の分離凸関数最小化を考える：

$$\textbf{(JSC)}\ \ \text{Minimize } f(x)=\textstyle\sum_{i=1}^{n} f_i(x(i)) \quad \text{subject to } x\in J.$$

ここで，$f_i:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ は凸関数 $(i=1,2,\dots n)$，J はジャンプシステムである．本稿の目的は (JSC) に対し，現在の解から最適解まで最短距離で解が遷移する測地線アルゴリズムを構築することである．

本稿では，現在の解 x を $x+d$ に更新することを繰り返す反復型アルゴリズムにおいて，各反復で

$$\mu(x+d)=\mu(x)-\|d\|_1 \qquad (1)$$

が常に成り立つとき，そのアルゴリズムが測地線アルゴリズムであると定義する．ここで，$\mu(x)$ は x から最も近い最適解までの L_1 距離を表す．

2.　ジャンプシステムの定義とアルゴリズム

$N=\{1,2,\dots,n\}$ とおく．各 $i\in N$ に対し，第 i 成分が 1 で他成分が 0 の単位ベクトルを χ_i と表し，$U=\{+\chi_i,-\chi_i \mid i\in N\}$ と定義する．$x,y\in\mathbb{Z}^n$ に対し，$\|x-y\|_1=\|x+s-y\|_1+1$ を満たす $s\in U$ の集合を $\mathrm{inc}(x,y)$ と書く．整数格子点の集合 $J\subseteq\mathbb{Z}^N$ がジャンプシステムであるとは，J が以下の 2 ステップ公理を満たすことをいう．

(2 ステップ公理)　任意の $x,y\in J$ と $s\in\mathrm{inc}(x,y)$ に対し $x+s\notin J$ となるとき，$x+s+t\in J$ を満たす $t\in\mathrm{inc}(x+s,y)$ が存在する．

ジャンプシステムは穴が空いた領域も表現できる．$n=2$ におけるジャンプシステムの例を図 1 に示す．

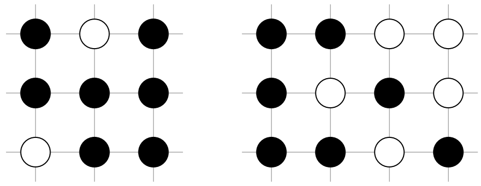

図 1: ジャンプシステム J の例 (● が J の要素)

本稿で考える問題 (JSC) では，局所最適条件が大域的最適性を特徴づけることが知られている．

定理 2.1. ([2, Corollary 4.2]) (JSC) の実行可能解 $x^*\in J$ が最適解であるための必要十分条件は，任意の $x^*+s+t\in J$ を満たす $s,t\in U\cup\{\mathbf{0}\}$ について $f(x^*)\le f(x^*+s+t)$ が成り立つことである．

定理 2.1 より，現在の解 x について $f(x{+}s{+}t)<f(x)$ かつ $x{+}s{+}t\in J$ を満たすような $s,t\in U\cup\{\mathbf{0}\}$ を見つけて x を $x+s+t$ に更新する，という操作を繰り返すことで，(JSC) の最適解が得られることが分かる．安藤ら [2] は単位ベクトル s を貪欲に選択することで，効率良く最適解を求めるアルゴリズムを提案している．

Algorithm 1 JSC-Greedy ([2])

S0　初期解 $x_0\in J$ を任意に選び，$x:=x_0$ とおく．

S1　$f(x)=\min\{f(x+s+t)\mid s,t\in U\}$ ならば x を出力し，アルゴリズムを終了する．

S2　以下の条件を満たす s^*,t^* を選択する．

$$s^*\in\arg\min\{f(x+s)\mid s\in U,\ \exists t\in U\cup\{\mathbf{0}\} \text{ such that } x{+}s{+}t{\in}J, f(x+s+t)<f(x)\}, \quad (2)$$

$$x+s^*+t^*\in J, \qquad f(x+s^*+t^*)<f(x). \quad (3)$$

S3　$x:=x+s^*+t^*$ として S1 へ戻る．

文献 [3] の定理と証明を僅かに修正することで，アルゴリズムの解析に有用な以下の性質が導ける．

定理 2.2 (cf. [3, Theorem 4.2])**.** $x\in J$ は (JSC) の非最適解とする．式 (2) を満たす $s^*\in U$ に対し

$$\begin{cases} x^*(i)\le x(i)-1 & (\text{if } s^*=-\chi_i),\\ x^*(i)\ge x(i)+1 & (\text{if } s^*=+\chi_i)\end{cases}$$

を満たす最適解 $x^*\in M^*(x)$ が存在する．

ただし

$$M^*(x)=\{x^*\in\mathbb{Z}^n \mid x^* \text{は } \|x^*-x\|_1=\mu(x) \text{ を満たす (JSC) の最適解 }\}$$

である．

定理 2.2 より，$t^* = \mathbf{0}$ となる反復では Algorithm 1 は式 (1) を満たす．しかし，$t^* \neq \mathbf{0}$ となる反復では式 (1) が成立しないことがあるため，Algorithm 1 は測地線アルゴリズムではない．

3. 主結果

本節では Algorithm 1 を精緻化することにより測地線アルゴリズムを構築する．具体的には，S2 における t^* の選択を，$x + s^* \in J$ であれば $t^* = \mathbf{0}$ とし，$x + s^* \notin J$ であれば $x + s^* + t^* \in J$ を満たす $t^* \in U$ を貪欲に選択する．

Algorithm 2 JSC-RefinedGreedy

S0 初期解 $x_0 \in J$ を任意に選び，$x := x_0$ とおく．

S1 $f(x) = \min\{f(x+s+t) \mid s, t \in U\}$ ならば x を出力し，アルゴリズムを終了する．

S2 式 (2) を満たす $s^* \in U$ を選択し，かつ

$$t^* \begin{cases} = \mathbf{0} & (\text{if } x + s^* \in J), \\ \in \arg\min\{f(x+s^*+t) \mid t \in U, \\ \qquad x + s^* + t \in J\} & (\text{if } x + s^* \notin J) \end{cases} \tag{4}$$

を満たすように $t^* \in U \cup \{\mathbf{0}\}$ を選択する．

S3 $x := x + s^* + t^*$ として S1 へ戻る．

以下では，定理 2.2 の主張を強めた定理を示す．

定理 3.1. $x \in J$ は (JSC) の非最適解とする．式 (2), (4) を満たす $s^* \in U, t^* \in U \cup \{\mathbf{0}\}$ に対し

$$\begin{cases} x^*(i) \le x(i) - 1 & (\text{if } s^* = -\chi_i, t^* = \mathbf{0}), \\ x^*(i) \ge x(i) + 1 & (\text{if } s^* = +\chi_i, t^* = \mathbf{0}), \\ x^*(i) \le x(i) - 2 & (\text{if } s^* = t^* = -\chi_i), \\ x^*(i) \ge x(i) + 2 & (\text{if } s^* = t^* = +\chi_i), \\ x^*(i) \le x(i) - 1, x^*(j) \le x(j) - 1 & \\ \qquad (\text{if } s^* = -\chi_i, t^* = -\chi_j, i \neq j), & \\ x^*(i) \ge x(i) + 1, x^*(j) \le x(j) - 1 & \\ \qquad (\text{if } s^* = +\chi_i, t^* = -\chi_j, i \neq j), & \\ x^*(i) \ge x(i) + 1, x^*(j) \ge x(j) + 1 & \\ \qquad (\text{if } s^* = +\chi_i, t^* = +\chi_j, i \neq j) & \end{cases}$$

を満たす最適解 $x^* \in M^*(x)$ が存在する．

定理 3.1 の証明は複雑かつ重要な部分であるが，紙幅の制約のため本稿では省略する (証明の詳細は文献 [4] を参照)．定理 3.1 より，Algorithm 2 の各反復で式 (1) が常に成り立つ．したがって，Algorithm 2 は測地線アルゴリズムである．

4. デルタマトロイド上の最適化への特殊化

集合 X, Y について，$X \Delta Y = (X \backslash Y) \cup (Y \backslash X)$ と定義する．有限集合 N とその部分集合族 $\mathcal{F} \subseteq 2^N$ について，$(N, \mathcal{F})$ のペアがデルタマトロイドであるとは，$N, \mathcal{F}$ が以下の公理をみたすことをいう．

(デルタマトロイドの交換公理) 任意の $X, Y \in \mathcal{F}$ と任意の $i \in X \Delta Y$ に対し $X \Delta \{i\} \notin \mathcal{F}$ となるとき，$X \Delta \{i, j\} \in \mathcal{F}$ を満たす $j \in X \Delta Y$ が存在する．

本節では，集合 N の各要素 i に重み $c(i) \in \mathbb{R}$ が与えられた状況において，デルタマトロイド上の線形最適化を考える：

(DM) Minimize $\sum_{i \in F} c(i)$ subject to $F \in \mathcal{F}$.

以下では任意の $F \subseteq N$ について $c(F) = \sum_{i \in F} c(i)$ と書く．定義より，デルタマトロイドはジャンプシステムの特殊ケースと見なすことができる [1]．このことから，3 節の Algorithm 2 を特殊化することで，問題 (DM) に対する以下の測地線アルゴリズムが得られる．

Algorithm 3 DM-RefinedGreedy

S0 初期解 $F_0 \in \mathcal{F}$ を任意に選び，$F := F_0$ とおく．

S1 $c(F) \le \min\{c(F \Delta \{i, j\}) \mid i, j \in N\}$ ならば F を出力し，アルゴリズムを終了する．

S2 以下の条件を満たす i^*, j^* を選択する．

$$i^* \in \arg\min\{c(F \Delta \{i\}) \mid i \in N,\ \exists j \in N$$
$$\text{such that } F \Delta \{i, j\} \in \mathcal{F}, c(F \Delta \{i, j\}) < c(F)\},$$

$$j^* \begin{cases} = i^* & (\text{if } F \Delta \{i^*\} \in \mathcal{F}), \\ \in \arg\min\{c(F \Delta \{i^*, j\}) \mid j \in N \setminus \{i^*\}, \\ \qquad F \Delta \{i^*, j\} \in \mathcal{F}\} & (\text{if } F \Delta \{i^*\} \notin \mathcal{F}). \end{cases}$$

S3 $F := F \Delta \{i^*, j^*\}$ として S1 へ戻る．

謝辞 本研究は JSPS 科研費 21K21290 の助成を受けたものである．

参考文献

[1] A. Bouchet, W.H. Cunningham, Delta-matroids, jump systems, and bisubmodular polyhedra, SIAM Journal on Discrete Mathematics 8 (1995) 17–32.

[2] K. Ando, S. Fujishige and T. Naitoh, A greedy algorithm for minimizing a separable convex function over an finite jump system, Journal of the Operations Research Society of Japan 38 (1995) 362–375.

[3] A. Shioura, K. Tanaka, Polynomial-time algorithms for linear and convex optimization on jump systems, SIAM Journal on Discrete Mathematics 21 (2007) 504–522.

[4] N. Minamikawa, Geodesic Property of Greedy Algorithms for Optimization Problems on Jump Systems and Delta-matroids, arXiv:2206.10439, 2022.