

オンラインナップサック問題に対する最小採択確率最大化

05001524 東京大学 *善永徹 YOSHINAGA Toru
02104990 東京大学 河瀬康志 KAWASE Yasushi

1. はじめに

ナップサック問題はナップサックに採択（アイテムをナップサックに入れること）されたアイテムの総価値を最大化するようにアイテムを採択する問題であり、ナップサックには容量、アイテムには価値とサイズがそれぞれ与えられ、ナップサックの容量制約を満たしつつアイテムを採択する必要がある。ナップサック問題は仕事の配分問題や限られた資源の割当問題として実社会の問題に応用されている。

オンラインナップサック問題 [1] はこのナップサック問題をオンライン形式（入力が逐次的に与えられ、その都度採択を行わなければならない状況）にした問題である。このような問題は未来の情報を知ることなくアイテムの採択を行う必要があるため、事前にすべての情報を知っていた場合に達成できる最適解を得ることは困難である。

2. 一般化魔法使い問題

オンラインナップサック問題の一種として、Alaei ら [2] は一般化魔法使い問題を提案した。この問題はサイズが確率的なアイテム列がオンライン形式で与えられたとき、すべてのアイテムを一定以上の確率でアイテムを採択し、その最小採択確率を最大化する問題である。一般化魔法使い問題のアルゴリズムは、オンライン確率的な一般化割当問題 [2] やオンライン預言者の不等式マッチング問題 [3] に対し、一定の出力を保証するアルゴリズムのサブルーチンとして応用される。

一般化魔法使い問題およびその類似問題 [4, 5] は逐次的に到着するアイテムのサイズがナップサック容量の $1/k$ 倍以下（ただし、 k はあらかじめ与えられた自然数）であり、ナップサックの容量が $1/k$ 以上空いていなければアイテムを採択できないという条件を仮定していた。これは Web 広告における広告枠の割当問題 [6, 7] を背景としているためであり、このような仮定は比較的大きなアイテムサイズが想定される割当をモデリングする場合には相性が悪いという欠点がある。

3. 問題設定

一般化魔法使い問題のアイテムサイズおよび採択の仮定に関する欠点を踏まえ、本稿ではサイズ制約を緩和した新たなサイズ確率的なナップサック問題を導入する。そしてこの問題においてすべてのアイテムを一定確率でナップサックに採択するアルゴリズムを与える。問題設定は以下の通りである。

オンラインサイズ確率的なナップサック

まず容量 1 のナップサックが与えられ、アイテムが逐次的に到着する。第 i 番目のアイテムが到着したとき、アイテムのサイズ分布 F_i が提示される。 F_i は $[0, 1]$ 上の独立な分布である。意思決定者はアイテムの到着時点でアイテムを採択するかどうか決定しなければならない。アイテム採択の決定は確率的に行うことができ、アイテムを採択した後、分布 F_i に従ってアイテムのサイズが判明する。一度採択されたアイテムはナップサックから除外することはできない。また、一度採択しないと決定したアイテムは以降採択不可能である。

このとき、いかなる入力列においても、各アイテムを一定以上の確率でナップサックに採択するような確率的な採択方策を設計し、保証できる確率の値を最大化する。ただし、アイテムサイズの期待値の和は 1 以下であることが保証されているものとする。

あるアイテムを採択することでナップサックの容量を超過した場合の扱いについて、本研究では以下の二つの仮定を扱う：そのアイテムはナップサックに

(1) 採択されたものとみなす。

(2) 採択されなかったものとみなす。

ただし、(1) の仮定においてナップサックの残り容量がちょうど 0 となった場合、追加でアイテムを採択することはできないとする。

4. 手法の枠組と主結果

一般化魔法使い問題に対する方策は、以下の2つのステップでアイテム i の採否を決定することになる。

1. アイテムの到着ごとに得られるアイテムのサイズ分布 $F_1, \dots, F_{i-1}$ を利用し、第 $i-1$ 番目までのアイテムを確率的採択方策に従ってアイテムを採択していった場合に、ナップサックに採択されたアイテムの総サイズについて、その実現値の分布を更新する。
2. 実際の実現値、得られた実現値の分布および到着したアイテムのサイズ分布 F_i を比較し、定義した確率的採択方策に従ってアイテムを確率的に採択する。

Alaei ら [2] はナップサックに採択されているアイテムの総サイズが小さい実現結果のものから優先して到着したアイテムの採択をしていくことで、アイテムのサイズがナップサック容量の $1/k$ 以下 (k は自然数) であるという仮定のもと、すべてのアイテムを $1 - 1/\sqrt{k}$ の確率で採択する方策を提案した。しかしながら、サイズにこのような仮定のない我々の問題設定において Alaei らの方策を用いると、アイテムの最小採択確率は限りなく 0 に近い値しか達成できない。

そこで我々はナップサックに採択されているアイテムの総サイズが大きい実現結果のものから優先して到着したアイテムを採択することにより、各アイテムを定数確率で採択する方策を提案し、以下の結果を得た。

定理 1. 仮定 (1) において、提案方策は各アイテムを確率 $1/2$ で入れることができる。また、これはオンライン方式の入力で方策が達成可能な理論限界である。

定理 2. 仮定 (2) において、提案方策は各アイテムを確率 $1/3$ で入れることができる。

5. まとめと今後の展望

本稿では一般化魔法使い問題からアイテムサイズ制約を緩和した新たなオンラインナップサック問題を考案し、各アイテムを非零の定数確率でナップサックに採択することを保証する方策を考案し

た。特に、仮定 (1) のもとでは、提案方策が保証する最小採択確率は、オンライン方式の入力で方策が達成できる理論限界と一致することを示した。

今後の展望としては仮定 (2) において理論限界を達成する採択方策を提案することが可能か検討中である。また、新たなモデルとしてアイテムの除去を許容したモデルにおいて最小採択確率を最大化する方策を検討中である。

参考文献

- [1] Marchetti-Spaccamela, A. and Vercellis, C., “Stochastic on-line knapsack problems”, *Mathematical Programming*, vol. 68, pp. 73–104 (1995).
- [2] Alaei, S., Hajiaghayi, M., and Liaghat, V., “The online stochastic generalized assignment problem”, In: APPROX/RANDOM, pp. 11–25 (2013).
- [3] Alaei, S., Hajiaghayi, M., and Liaghat, V., “Online prophet-inequality matching with applications to ad allocation”. In: EC, pp. 18–35 (2012).
- [4] Alaei, S., “Bayesian Combinatorial Auctions: Expanding Single Buyer Mechanisms to Many Buyer”, In: FOCS, pp. 512–521 (2011).
- [5] Srinivasan, A. and Xu, P., “The Generalized Magician Problem under Unknown Distributions and Related Applications”, In: AA-MAS, pp. 1219–1227 (2022).
- [6] Mehta, A., Saberi, A., Vazirani, U., and Vazirani, V., “AdWords and Generalized On-line Matching”, *J. of the ACM*, vol. 54, pp. 22–31 (2007).
- [7] Feldman, J., Korula, N., Mirrokni, V., Muthukrishnan, S., and Pál, M., “Online Ad Assignment with Free Disposal”, In: WINE, pp. 374–385 (2009).