

# 移動時間と容量が一定である辺を持つ双方向グリッドネットワークにおける最速避難問題

05001542 兵庫県立大学 \*戸國 友貴 TOKUNI Yuki  
01104684 兵庫県立大学 加藤 直樹 KATOH Naoki  
兵庫県立大学 照山 順一 TERUYAMA Junichi  
05000132 兵庫県立大学 東川 雄哉 HIGASHIKAWA Yuya

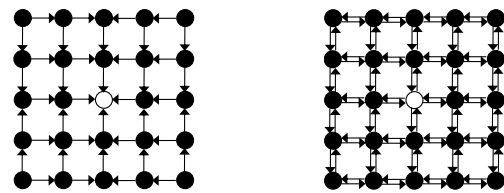
## 1. 研究の背景, 目的

津波などの自然災害に対する避難計画を策定する上で, すべての住民が避難を完了するために必要な最小時間(最速避難時間)を見積もることは重要である. このことを一つの動機として, 時間に対する避難者の動きを考慮できる動的フローネットワークを用いた研究が行われている [1, 2, 3, 5, 7, 8]. 動的フローネットワークとは, 辺に容量と移動時間(辺を端から端まで移動するのにかかる時間), 供給点と呼ばれる頂点に避難者数を表す供給量, 需要点と呼ばれる頂点に避難施設の収容可能人数を表す需要量が与えられたネットワークである. 需要点の一つである動的フローネットワークにおいて, 最速避難時間と避難者の逃げ方に対応する動的フローを求める問題を最速避難問題と呼び,  $\tilde{O}(m^2k^5 + nm^2k)$  時間で解くアルゴリズムが知られている [2, 7, 8]. 特に, 最速避難時間のみであれば  $\tilde{O}(m^2k^4 + nm^2k)$  時間で計算できることが知られている [7, 8]. ここで,  $n$  は頂点の数,  $m$  は辺の数,  $k$  は供給点と需要点を合わせた数を表す.  $\tilde{O}$  は Big  $O$  記法から対数因子を無視したものである.

これらのアルゴリズム [2, 7, 8] の計算時間が高次多項式時間であるのは, 計算に時間がかかる劣モジュラ関数最小化アルゴリズムをサブルーチンとして用いるためである. 一方, Kamiyama ら [3] や Mamada ら [5] はネットワークの形を限定することにより, 劣モジュラ関数最小化アルゴリズムをサブルーチンとして用いないアルゴリズムを提案している.

特に, Kamiyama ら [3] が対象としたグリッドネットワークは, 現実の道路網の形状の良い近似になっているため, 重要なネットワーククラスであると言える [9]. Kamiyama ら [3] は, 図 1(a) のような辺の容量と移動時間が一定かつ避難者が避難施設への最短経路しか通れないように辺が向きづけられたグリッドネットワークに対して,  $O(n \log n)$  時間アルゴリズムを提案している. 本稿では, 図 1(b) のような頂点間に双方向の有向辺を持つグリッドネットワークを対象とし, 最速避難時間を求める問題を考える. このネットワークは Kamiyama ら [3] のネットワークから辺の向きに関する制約を外したものであり, 各避難者による最短経路以外の路を用い

た避難も表現することができる. 我々の問題に対して, 既存のアルゴリズム [7, 8] を適用すると最速避難時間は  $\tilde{O}(n^6)$  時間で計算できるが, 本稿では劣モジュラ関数最小化アルゴリズムをサブルーチンとして用いない  $O(n^3 \log^2 n)$  時間アルゴリズムを提案する.



(a) 最短経路のみを使用可能なグリッドネットワーク (b) 最短経路以外も使用可能な双方向グリッドネットワーク

図 1: 二種類のグリッドネットワーク. 黒丸が供給点, 白丸が需要点を表す.

## 2. 準備

### 2.1. 問題のモデル

本問題ではグリッド状の動的フローネットワーク  $\mathcal{G} = (G = (V, E), u, \tau, S = S^+ \cup \{s^-\})$  と供給量関数  $w: S^+ \rightarrow \mathbb{R}_+$  が与えられる. ここで  $\mathbb{R}_+$  は非負の実数の集合を表す.  $G$  は図 1(b) のように平面上にある  $N \times N$  個の頂点からなる双方向グリッドグラフであり,  $n = N^2$  とする. すべての辺の移動時間, 容量は一定であり, 各辺の移動時間を  $\tau$ , 容量を  $u$  とし,  $u, \tau$  は正の実数とする. グラフ上の需要点は唯一であるとし,  $s^-$  と表す. また,  $s^-$  以外のすべての頂点を供給点とし, その集合を  $S^+ := V \setminus \{s^-\}$  と表す.  $s \in S^+$  に対して,  $w(s)$  は  $s$  における避難者数である供給量を表す  $0$  以上の実数とする. また, 供給点集合  $A \subseteq S^+$  に対して,  $w(A) := \sum_{s \in A} w(s)$  と定義する.

任意の辺  $e \in E$  と時刻  $\theta \in \mathbb{R}_+$  に対して, 動的フロー  $f(e, \theta)$  は時刻  $\theta$  に辺  $e$  に入る流量を表す.  $f$  が実行可能な動的フローであるとは任意の時刻  $\theta$  と辺  $e$  において  $f(e, \theta)$  が  $0$  以上, 辺  $e$  の容量以下であり, フロー保存則を満たすことである. 最速避難時間  $T^*$  とは時刻  $0$  から  $T$  以内に各供給点から供給量と同じ量が出て, 需要点に入る実行可能な動的フローが存在するような時刻  $T$  の最小値である.

本稿ではグリッドネットワーク  $\mathcal{G}$ , および供給量関数  $w$  に対して, 最速避難時間を求める問題を考え, 以下の定理を示す.

**定理 2.1** グリッドネットワーク  $\mathcal{G}$ , および供給量関数  $w$  に対して, 最速避難時間  $T^*$  は  $O(n^3 \log^2 n)$  時間で得られる.

## 2.2. 最大動的フローと最速避難時間

需要点が一つである動的フローネットワーク  $\mathcal{N}$  において, 任意の供給点集合  $A \subseteq S^+$  に対して, 最大動的フロー  $o^T(A)$  は時刻 0 から  $T$  以内に  $A$  から需要点  $s^-$  へ送ることができる動的フローの量の最大値を表す. このとき,  $A$  の各供給点から出るフローの量に制限がないことに注意する. 最速避難時間に関する定理として, Klinz の定理 [4] が知られている.

**定理 2.2 (Klinz の定理 [4])** 動的フローネットワーク  $\mathcal{N}$ , 供給量関数  $w$ , 時刻  $T$  に対して, 時刻 0 から  $T$  以内に各供給点の供給量を満たす実行可能な動的フローが存在する必要十分条件は

$$\min\{o^T(A) - w(A) \mid A \subseteq S^+\} \geq 0 \quad (1)$$

が成り立つことである.

定理 2.2 より, 最速避難時間  $T^*$  は式 (1) を満たす最小の  $T$  である. 動的フローネットワーク  $\mathcal{N}$  において, 供給点集合  $A \subseteq S^+$  の最小必要時間  $\theta(A)$  を  $o^\theta(A) = w(A)$  を満たす  $\theta$  とする. 定理 2.2 と  $o^T(A)$  が  $T$  に対して単調非減少であることより, 以下の系が成り立つ.

**系 2.1** 動的フローネットワーク  $\mathcal{N}$ , 供給量関数  $w$  に対して,

$$T^* = \max\{\theta(A) \mid A \subseteq S^+\}$$

である.

以下では,  $T^* = \theta(A)$  が成り立つ供給点集合  $A$  を臨界供給点集合と呼び,  $A^*$  と表す.

## 3. アルゴリズム

本章ではグリッドネットワーク  $\mathcal{G}$  と供給量関数  $w$  に対して, 最速避難時間を求めるアルゴリズムについて述べる. 系 2.1 より, 供給点集合の冪集合の全ての要素に対して, 最小必要時間  $\theta(A)$  を計算し, その中の最大値を求めることにより最速避難時間  $T^*$  が得られる. 対して我々は, 対象ネットワークの性質を用いて  $A^* \in \mathcal{A}$ ,  $|\mathcal{A}| = O(n^2)$  を満たす供給点集合の族  $\mathcal{A}$  の存在およびその効率的な計算方法を示すことで, 全体の計算時間を短縮した.  $\mathcal{A}$  について以下の補題が成り立つ.

**補題 3.1** グリッドネットワーク  $\mathcal{G}$ , 供給量関数  $w$  に対して,  $A^* \in \mathcal{A}$ ,  $|\mathcal{A}| = O(n^2)$  を満たす供給点集合の族  $\mathcal{A}$  は  $O(n^3 \log^2 n)$  時間で得られる.

系 2.1 と補題 3.1 より, 最速避難時間  $T^*$  は以下のアルゴリズムで求まる.

---

### Algorithm 1 最速避難時間 $T^*$ を求めるアルゴリズム

---

入力:  $\mathcal{G}, w$

出力:  $T^*$

- 1:  $A^* \in \mathcal{A}$ ,  $|\mathcal{A}| = O(n^2)$  を満たす供給点集合の族  $\mathcal{A}$  を得る.
- 2:  $\mathcal{A}$  のすべての供給点集合  $A$  に対して最小必要時間  $\theta(A)$  を求める.
- 3: 得られた最小必要時間の中で最大の値を出力する.

アルゴリズム 1 の 2 行目において, Saho ら [6] のアルゴリズムを用いると, 任意の供給点集合  $A \subseteq S^+$  に対して, 最小必要時間  $\theta(A)$  は  $O(n^3 \log^2 n)$  時間で得られるが, 対象ネットワークにおいて, 需要点  $s^-$  の入次数が 4 であることと辺の容量が一定であることを用いると, 以下の補題を得る.

**補題 3.2** グリッドネットワーク  $\mathcal{G}$ , 供給量関数  $w$  が与えられたとき, 任意の供給点集合  $A \subseteq S^+$  に対して, 最小必要時間  $\theta(A)$  は  $O(n \log^2 n)$  時間で得られる.

補題 3.1 より, アルゴリズム 1 の 1 行目は  $O(n^3 \log^2 n)$  時間で実行できる. 2 行目は,  $O(n^2)$  個の  $A \in \mathcal{A}$  に対して, 最小必要時間  $\theta(A)$  を求めているので, 補題 3.2 より,  $O(n^3 \log^2 n)$  時間で実行できる. よって, 定理 2.1 を得る.

## 4. 謝辞

本研究の一部は JSPS 科研費 19H04068, 20K19746 の助成を受けたものである.

## 参考文献

- [1] B. Hoppe, and É. Tardos, “The quickest transshipment problem.” In Proceedings of the sixth annual ACM-SIAM symposium on Discrete algorithms, pp. 512–521, 1995.
- [2] N. Kamiyama, “Discrete newton methods for the evacuation problem.” Theoretical Computer Science, 795: pp. 510–519, 2019.
- [3] N. Kamiyama, N. Katoh, and A. Takizawa, “An efficient algorithm for evacuation problem in dynamic network flows with uniform arc capacity.” IEICE transactions on information and systems, 89(8): pp. 2372–2379, 2006.
- [4] B. Klinz. Cited as personal communication (1994) in [1].
- [5] S. Mamada, K. Makino, and S. Fujishige, “Evacuation problems and dynamic network flows.” In SICE 2004 Annual Conference, 1: pp. 530–535, 2004.
- [6] M. Saho and M. Shigeno. “Cancel-and-tighten algorithm for quickest flow problems.” Networks, 69(2):179–188, 2017.
- [7] M. Schlöter, M. Skutella, and K. Van Tran, “A Faster Algorithm for Quickest Transshipments via an Extended Discrete Newton Method.” In Proceedings of the 2022 Annual ACM-SIAM symposium on Discrete Algorithms (SODA), pp. 90–102, 2022.
- [8] M. Schlöter, “Flows over time and submodular function minimization.” PhD thesis, Technische Universität Berlin, 2018.
- [9] D. Stanislawski “The Origin and Spread of the Grid- Pattern Town.” Geographical Review 36 (1): pp. 105–120, 1947.