

辺の長さが擬順序集合の要素で与えられた最短経路問題

01110072 弘前大学 *金正道 KON Masamichi

1. はじめに

最短経路問題を考える。ここで、各辺の長さは擬順序集合の要素であるとし、異なる2頂点間の経路の長さは経路する辺の長さの二項演算によって定義され、(弱)非劣経路を考える。

2. 最短経路問題

2.1. 順序と演算

$\mathcal{L} \neq \emptyset$ を集合とし、 $\preceq$ を $\mathcal{L}$ 上の擬順序 (反射的, 推移的) とし、 $\prec$ を $\mathcal{L}$ 上の狭義半順序 (非反射的, 推移的) とする。さらに

$$x, y \in \mathcal{L}, x \prec y \Rightarrow x \preceq y, x \not\preceq y$$

であると仮定する。 $\mathcal{L} \subset \mathbb{R}$ であるときは、 $\preceq$ は $\leq$ であり、 $\prec$ は $<$ であるとする。また、 $\circ: \mathcal{L} \times \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L}$ を $\mathcal{L}$ 上の二項演算とする。 $x \circ y \circ z$ や $x_1 \circ x_2 \circ \dots \circ x_n$ などと表すが、演算は左から順に行うことを意味する。 $\circ$ が狭義左単調であるとは、 $x, y, z \in \mathcal{L}, y \prec z$ ならば $y \circ x \prec z \circ x$ となることをいう。 $\circ$ が両項単調増加であるとは、任意の $x, y \in \mathcal{L}$ に対して $x \preceq x \circ y, x \preceq y \circ x$ となることをいう。

以降の例で用いるため、 $\mathcal{K} = \{A \subset [0, 1) : \min A, \max A \text{ が存在する}\}$ とし、各 $A \in \mathcal{K}$ に対して $A^L = \min A, A^R = \max A$ とする。

例1 $\mathcal{L} = [0, 1)$ とし、 $\alpha \in (0, 1]$ とする。各 $x, y \in \mathcal{L}$ に対して、 $x \circ y = 1 - \alpha(1-x)(1-y)$ とする。このとき、 $\circ$ は狭義左単調かつ両項単調増加になる。

例2 $\mathcal{L} = \mathcal{K}$ とする。各 $A, B \in \mathcal{L}$ に対して

$$\begin{aligned} A \preceq B &\stackrel{\text{def}}{\iff} A^L \leq B^L, A^R \leq B^R \\ A \prec B &\stackrel{\text{def}}{\iff} A^L < B^L, A^R < B^R \end{aligned}$$

とし、 $A \circ B = \{1 - \alpha(1-x)(1-y) : x \in A, y \in B\}$ とする。ここで、 $\alpha \in (0, 1]$ である。このとき、 $\circ$ は狭義左単調かつ両項単調増加になる。

2.2. 定式化

$G = (V, E)$ をグラフとする。ここで、 V は頂点の集合であり、 $E \subset (V \times V) \setminus \{(i, i) : i \in V\}$ は辺の集合である。各辺 $(i, j) \in E$ は長さ $a_{ij} \in \mathcal{L}$ をもつとする。2つ以上の頂点の列 $P = (s, i, j, \dots, k, t)$ で $(s, i) \in E, (i, j) \in E, \dots, (k, t) \in E$ をみたすものを s から t へ

の経路といい、 $a_{si} \circ a_{ij} \circ \dots \circ a_{kt}$ を P の長さとして定義する。

$s, t \in V, s \neq t$ とし、 $\mathcal{P}_{st}$ を s から t へのすべての経路の集合とし、 $P^* \in \mathcal{P}_{st}$ とする。また、各 $P \in \mathcal{P}_{st}$ に対して、 $\ell(P)$ を P の長さとする。 P^* が s から t への最短経路であるとは、任意の $P \in \mathcal{P}_{st}$ に対して $\ell(P^*) \preceq \ell(P)$ となることをいう。 P^* が s から t への非劣経路であるとは、 $P \in \mathcal{P}_{st}, \ell(P) \preceq \ell(P^*)$ ならば $\ell(P) \succeq \ell(P^*)$ となることをいう。 P^* が s から t への弱非劣経路であるとは、 $\ell(P) \prec \ell(P^*)$ となる $P \in \mathcal{P}_{st}$ が存在しないことをいう。非劣経路は必ず存在し、非劣経路は弱非劣経路になる。

ある $s \in V$ から他の $t \in V$ への最短経路または (弱) 非劣経路を求める問題を最短経路問題という。

3. ダイクストラ法

本節では、 $\mathcal{L} \subset \mathbb{R}$ と仮定し、最短経路問題を考える。以下で述べるダイクストラ法は、もとのダイクストラ法 (Dijkstra [1]) を少しだけ修正したものであり、 $\circ$ が狭義左単調かつ両項単調増加ならば、ある $s \in V$ から他のすべての頂点への最短経路を求めることができる。

ダイクストラ法

(0) $S := \{s\}, \bar{S} := V \setminus \{s\}$ とし、各 $i \in V \setminus \{s\}$ に対して

$$\begin{aligned} d(i) &:= \begin{cases} a_{si} & \text{if } (s, i) \in E \\ \infty & \text{if } (s, i) \notin E \end{cases} \\ p(i) &:= s \quad \text{if } (s, i) \in E \end{aligned}$$

とする。

(1) $S = V$ ならば終了。そうでなかったら

$$d(v) = \min\{d(i) : i \in \bar{S}\}$$

となる頂点 $v \in \bar{S}$ を選ぶ。

(2) $S := S \cup \{v\}, \bar{S} := \bar{S} \setminus \{v\}$ とし、 $(v, j) \in E, j \in \bar{S}$ であるすべての辺 (v, j) に対して

$$d(j) > d(v) \circ a_{vj} \text{ ならば } d(j) := d(v) \circ a_{vj}, p(j) := v$$

とする。ステップ (1) に戻る。

4. 最短経路問題のスカラー化

$\psi: \mathcal{L} \rightarrow \mathbb{R}$ とし、 ψ をスカラー化関数とよぶ。 $\bullet$ を $\psi(\mathcal{L})$ 上の二項演算とし、任意の $x', y' \in \psi(\mathcal{L})$ および $x' = \psi(x), y' = \psi(y)$ となる任意の $x, y \in \mathcal{L}$ に対して

$x' \bullet y' = \psi(x \circ y)$ であると仮定する。このとき、任意の有限個の $x, y, \dots, z \in \mathcal{L}$ に対して $\psi(x) \bullet \psi(y) \bullet \dots \bullet \psi(z) = \psi(x \circ y \circ \dots \circ z)$ となる。 ψ が (狭義) 単調増加であるとは、 $x, y \in \mathcal{L}, x \preceq (<) y$ ならば $\psi(x) \leq (<) \psi(y)$ となるときをいう。 $x, y \in \mathcal{L}$ に対して

$$x \prec y \Leftrightarrow x \preceq y, x \neq y$$

であるとき、 ψ が狭義単調増加ならば ψ は単調増加になる。また、 ψ が単調増加であるとき、 $\circ$ が両項単調増加ならば $\bullet$ も両項単調増加になる。

例3 $\mathcal{L} = \mathcal{K}$ とする。各 $A, B \in \mathcal{L}$ に対して

$$A \preceq B \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} A^L \leq B^L, A^R \leq B^R$$

$$A \prec B \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} A \preceq B, A \not\preceq B$$

とし、 $A \circ B = \{1 - \alpha(1 - x)(1 - y) : x \in A, y \in B\}$ とする。ここで、 $\alpha \in (0, 1]$ である。スカラー化関数 $\psi : \mathcal{L} \rightarrow \mathbb{R}$ を各 $A \in \mathcal{L}$ に対して $\psi(A) = 1 - \alpha(1 - A^L)(1 - A^R)$ とする。このとき、 ψ は単調増加かつ狭義単調増加になる。また、 $\psi(\mathcal{L}) = [1 - \alpha, 1]$ であり、 $x, y \in \psi(\mathcal{L})$ に対して、 $x \bullet y = 1 - \alpha(1 - x)(1 - y)$ とすると、 $x = \psi(A), y = \psi(B)$ となる任意の $A, B \in \mathcal{L}$ に対して $x \bullet y = \psi(A \circ B)$ となる。

最短経路問題において、 $a_{ij} \in \mathcal{L}, (i, j) \in E$ および $\circ$ を $\psi(a_{ij}) \in \psi(\mathcal{L}), (i, j) \in E$ および $\bullet$ で置き替えた最短経路問題をスカラー化最短経路問題とよぶことにする。 $\bullet$ が狭義左単調かつ両項単調増加ならば、スカラー化最短経路問題はダイクストラ法を適用することによって解くことができる。

定理 ψ は狭義単調増加であるとする。 $s, t \in V, s \neq t$ とし、 P^* をスカラー化最短経路問題における s から t への最短経路とする。このとき、 P^* はもとの最短経路問題における s から t への弱非劣経路になる。さらに、 $x, y \in \mathcal{L}$ に対して

$$x \prec y \Leftrightarrow x \preceq y, x \not\preceq y$$

ならば、 P^* はもとの最短経路問題における s から t への非劣経路になる。

5. 数値例

例3 ($\alpha = \frac{1}{2}$) と同じ設定で図1の最短経路問題を考える ($s = 1$)。スカラー化最短経路問題は図2のようになり、このスカラー化最短経路問題にダイクストラ法を適用すると、図3の最短経路木が得られる。よって、非劣経路は図4の非劣経路木によって与えられ、非劣経路は弱非劣経路でもある。

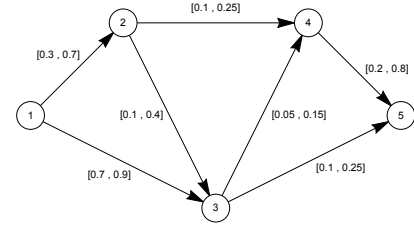


図1 最短経路問題

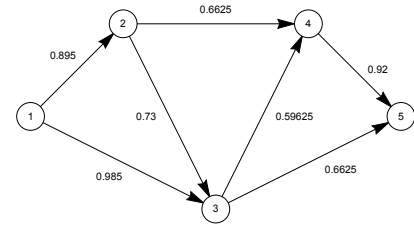


図2 スカラー化最短経路問題

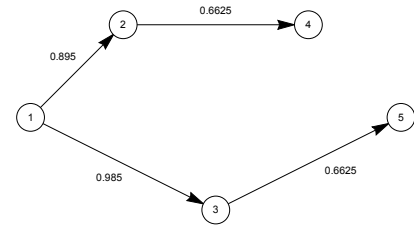


図3 最短経路木

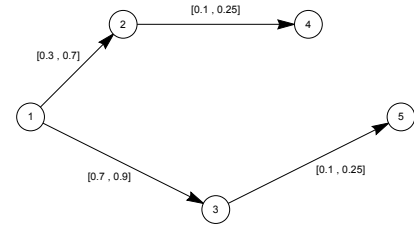


図4 非劣経路木

6. おわりに

本稿では、辺の長さが擬順序集合の要素で与えられた最短経路問題を扱った。そして、スカラー化最短経路問題にダイクストラ法を適用し、もとの最短経路問題における (弱) 非劣経路を求めることができることを示した。また、最短経路問題のみを扱ったが、最長経路問題についても同様な結果が得られる。

参考文献

- [1] E. W. Dijkstra, A note on two problems in connexion with graphs, Numerische Mathematik, Vol.1, 1959, pp.269–271