パスの m 最適ペブリング数

申請中 九州大学 *町田 諒 MACHIDA Makoto
05000219 大阪大学 山口 勇太郎 YAMAGUCHI Yutaro

1 はじめに

グラフペブリングでは, グラフとそのグラフの頂点に対するペブル (小石) の配置に対し, ペブリングムーブという操作を繰り返すことでペブルを動かし目標の頂点へと運んでいく．任意の頂点へペブルを運ぶことが可能となる配置が存在する最小のペブルの数を**最適ペブリング数**, 任意の頂点へ m 個のペブルを運ぶ場合での最小のペブル数を m **最適ペブリング数**と呼び, 様々なグラフについて研究されている [1, 2, 3].

文献 [2] では, 階段状のグラフの最適ペブリング数を求める過程で, パスの 2 最適ペブリング数を利用して下界を示している．このように, 複雑なグラフの最適ペブリング数を示すために, より簡単なグラフの m 最適ペブリング数が利用されることがある．パスについては, 1 最適ペブリング数と 2 最適ペブリング数がすでに知られているが, 本稿では, 3 以上の m に対するパスの m 最適ペブリング数について述べる.

2 準備

無向グラフ $G=(V,E)$ に対し, 各頂点に置かれたペブルの数を表す関数 $D\colon V\to\mathbb{Z}$ を**配置**と呼ぶ．ペブリングムーブでは, 2 つ以上のペブルを持つ頂点 v から 2 つのペブルを取り除くことで, v の任意の隣接頂点 1 つにペブルを 1 つ加えることができる.

グラフ G における配置 D と, ある頂点 r について, ペブリングムーブを任意の回数 (0 回も可) 行った後に r にペブルを持たせることが出来る場合, r は配置 D において到達可能であるという (図 1).

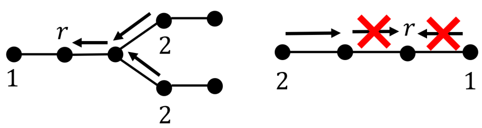

図 1: r が到達可能な例 (左) と到達不可能な例 (右)

すべての頂点が到達可能である配置が 1 つでも存在するような最小のペブルの個数 k を最適ペブリング数といい, $\pi(G)=k$ と表す．また, すべての頂点で m 個以上のペブルが到達可能となる配置が 1 つでも存在するような最小のペブル数 k を m 最適ペブリング数といい, $\pi_m(G)=k$ と表す.

頂点数 n のパス P_n の m 最適ペブリング数について, 以下の定理が知られている.

定理 2.1 (Bunde et al. [1])**.** $\pi(P_n)=\lceil 2n/3\rceil$.

定理 2.2 (Bunde et al. [1])**.** $\pi_2(P_n)=n+1$.

3 本論

以下では, パスの m 最適ペブリング数が次のように与えられることを示す.

定理 3.1. $m=3k+r\geq 2$ $(k\geq 0, r\in\{0,1,2\})$ のとき,

$$\pi_{3k+r}(P_n)=\begin{cases}\lfloor \frac{1}{2}n+1\rfloor+k(n+2) & (r=1),\\ n+1+k(n+2) & (r=2),\\ k(n+2) & (r=0).\end{cases} \tag{1}$$

3.1 上界

まずは上界を得るため, それぞれの r の場合における具体的な最適配置を 1 つ与える.

補題 3.2. 式 (1) の右辺を達成する配置が存在する.

証明. $r=0$ のときは, 図 2 のように $(2k,k,k,\ldots,k,2k)$ と配置すればよく, $\pi_{3k}(P_n)\leq k(n+2)$ である.

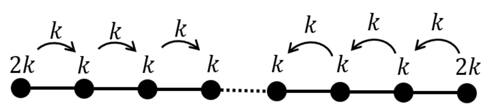

図 2: パスの $3k$ 最適配置

$r=2$ のとき, 定理 2.2 と $r=0$ の配置を組み合わせることで, $\pi_{3k+2}(P_n) \le \pi_2(P_n)+\pi_{3k}(P_n) \le n+1+k(n+2)$ を得る.

$r=1$ のとき, $m=4$ の配置として, n が奇数のときは $(2,3,0,3,0,\ldots,0,3,2)$, 偶数のときはこれの端点にペブルを 2 個持つ頂点を追加したものを考えると, いずれも 4 到達可能である. このときのペブルの数は $\lfloor \frac{3}{2}n+3 \rfloor = \lfloor \frac{1}{2}n+1 \rfloor + (n+2)$ であり, $r=2$ のときと同様にして, $\pi_{3k+1}(P_n) \le \lfloor \frac{1}{2}n+1 \rfloor + k(n+2)$ を得る. □

3.2 下界

まず, m 到達可能であるために必要なペブルの数を求める線形計画緩和問題を考え, 双対性を利用することで以下の補題を示せる.

補題 3.3. *パス P_n の m 最適ペブリング数 $\pi_m(P_n)$ について, $\pi_m(P_n) \ge \frac{n+2}{3}m$.*

補題 3.2 と補題 3.3 より, $r=0$ のときに上下界が一致しており, この場合には成り立つことが証明できた.

次に, $r=1,2$ の場合の最適ペブリング数を求める. よりよい下界を得るために, 3 最適配置 $D_3=(2,1,1,\ldots,1,2)$ を取り除くことで $m=5,8,11,\ldots$ の場合では $m=2$ に, $m=7,10,13,\ldots$ の場合では $m=4$ に帰着できることを示す. 3 最適配置 D_3 では, 各頂点に 3 個のペブルを到達させるためにすべてのペブルを使い果たすことから, 以下の補題が示せる.

補題 3.4. *$\pi_m(P_n)$ のペブル配置から 3 最適配置 D_3 を取り除けるとき, $\pi_m(P_n)=\pi_{m-3}(P_n)+\pi_3(P_n)$.*

補題 3.4 を用いるために, 平滑化を利用して $m \ge 5$ において D_3 を取り除くことができる最適配置が存在することを示す. 平滑化とは, ペブルの配置において多くのペブルを持つ頂点からペブルの少ない頂点へ移し替える作業である. 平滑化により, 最適配置においてペブルが 0 個の頂点に到達可能性を損なわずにペブルを移し替えることが可能であることを示せる.

補題 3.5. *$m \ge 5$ のとき, 両端点に 2 個以上, それ以外の頂点に 1 個以上のペブルがある m 最適配置が存在する.*

$m=2$ では定理 2.2 のとおりなので, 補題 3.4, 3.5 より

$$\pi_{3k+2}(P_n)=\pi_2(P_n)+k\pi_3(P_n)=(n+1)+k(n+2).$$

これは, 定理 3.1 における $r=2$ の場合と合致している.

最後に $m=4$ における最適ペブリング数を示す.

補題 3.6. *$\pi_4(P_n)=\lfloor \frac{3}{2}n+3 \rfloor$*

この補題の証明においても 3 最適配置 D_3 を取り除くことを考えるが, 補題 3.5 は $m \ge 5$ の場合でしか成り立たない. そこで, $\frac{1}{2}$ 個のペブル移動を許容する緩和問題について考える. この問題における m 最適ペブリング数を $\pi'_m(G)$ とすると, $\pi_m(G) \ge \pi'_m(G)$ が成り立つ. この問題について補題 3.5 を拡張させると次の補題が成り立つ.

補題 3.7. *$\frac{1}{2}$ 個のペブル移動を許容する問題において, $m=4$ のとき, 両端点に 2 個以上, それ以外の頂点に 1 個以上のペブルがある m 最適配置が存在する.*

$\frac{1}{2}$ 個のペブル移動を利用することで, この補題も補題 3.5 と同様の手順で示すことができる. したがって, 緩和問題における 1 最適に帰着することができたので, 以下の補題を示すことで $m=4$ の下界を得る.

補題 3.8. *$\pi'_1(P_n)=\lfloor \frac{1}{2}n+1 \rfloor$*

補題 3.8 より,

$$\begin{aligned}\pi'_4(P_n) &= \pi'(P_n)+k\pi_3(P_n) \\ &= \left\lfloor \frac{1}{2}n+1 \right\rfloor + n+2.\end{aligned}$$

$\pi'_4(P_n) \le \pi_4(P_n)$ であり, 補題 3.2 より, $\pi_4(P_n)=\lfloor \frac{3}{2}n+3 \rfloor$ となる. したがって,

$$\begin{aligned}\pi_{3k+1}(P_n) &= \pi_4(P_n)+(k-1)\pi_3(P_n) \\ &= \left\lfloor \frac{1}{2}n+1 \right\rfloor + k(n+2).\end{aligned}$$

以上より, 定理 3.1 が示せた.

参考文献

[1] D.P. Bunde, E.W. Chambers, D. Cranston, K. Milans, and D.B. West. Pebbling and optimal pebbling in graphs. *Journal of Graph Theory*, Vol. 57, No. 3, pp. 215–238, 2008.

[2] E. Győri, G.Y. Katona, L.F. Papp, and C. Tompkins. The optimal pebbling number of staircase graphs. *Discrete Mathematics*, Vol. 342, No. 7, pp. 2148–2157, 2019.

[3] C.L. Shiue, H.H. Chiang, M.M. Wong, and H.M. Srivastava. The optimal t-pebbling number of a certain complete m-ary tree. *RACSAM*, Vol. 113, No. 3, pp. 2889–2910, 2019.