

# 連続時間型マルコフ連鎖を利用した施設密集度最適化手法の提案

01607140 静岡理科大学 \*水野信也 MIZUNO Shinya

## 1. はじめに

COVID-19によって世界中で感染予防の対応に迫られており、政府・自治体をはじめ様々な対策を行なっている。企業や教育機関では、うがい・手洗いなどの感染予防対策はもちろんのこと、人々が密集しない環境作りが求められている。オンライン環境の利用が進み、人々の密集を回避できる機会は増えてきたが、元々ある環境の変更が難しく、密集回避が難しい場面も多々ある。密集度を客観的に施設ごと評価する指標が必要である。

そこで本研究では、対象施設における拠点間推移確率と滞在時間の情報を取得して、連続時間型マルコフ連鎖でのモデル化を行う。その定常分布が得られた場合に、定常分布の分散を施設における密集度と定義して、施設密集度を評価する。そして、各拠点の滞在時間パラメタを説明変数、定常分布の分散を目的関数として、ある制約条件下で最適化を行うことで、現実的な条件に対する密集度改善手法の一つになると考えられる。

## 2. 連続時間型マルコフ連鎖による施設密集度最適化手法の定義

最初に連続時間型マルコフ連鎖 [1] による施設密集度の定義を行う。有限個の状態空間  $S$  があり、連続時間確率過程  $\{X(t); t \geq 0\}$  が、推移確率  $P(t) = (p_{ij}(t)), i, j \in S$  を持つ  $S$  上の連続時間型マルコフ連鎖とする。  $X(t)$  は次の式を満たし、斉時的であるとする。

$$p_{ij}(t) = P(X(s+t) = j | X(s) = i), i, j \in S$$

また、推移確率  $p_{ij}(t)$  に対して

$$q_i = \lim_{h \downarrow 0} \frac{1 - p_{ii}(h)}{h} \in [0, \infty], i \in S$$

$$q_{ij} = \lim_{h \downarrow 0} \frac{p_{ij}(h)}{h} \in [0, \infty], i \in S, i \neq j$$

が存在する。  $q_{ii} = -q_i, i \in S$  として、推移率行列を次のようにおく。ただし、  $P(0) = I$  とする。

$$Q = (q_{ij}) = \lim_{h \downarrow 0} \frac{P(h) - I}{h}$$

ここで、時刻  $t$  で  $X(t) = i$  となったとき、  $i \in S$  での残り滞在時間  $\tau_i(t)$  が  $u$  より大きい確率を次の式で与える。

$$P(\tau_i(t) > u | X(t-) \neq i, X(t) = i) = e^{-a_i u}$$

$1/a_i$  は  $i \in S$  での平均滞在時間である。これらから推移率  $q_{ij}$  を次式のように表現できる。

$$q_{ij} = \begin{cases} -a_i & (i = j) \\ a_i p_{ij} & (i \neq j) \end{cases} \quad (1)$$

$X(t)$  が既約でエルゴード性を持つとき、  $j \in S$  に対して極限分布が存在し、

$$\pi_j = \lim_{t \rightarrow \infty} p_{ij}(t) \geq 0, \sum_j \pi_j = 1$$

となる。この  $\pi_j$  は、

$$\sum_{i \in S} \pi_i q_{ij} = 0, (j \in S) \quad (2)$$

を満たし、  $\{X(t)\}$  の定常分布である。施設密集度を、各状態の定常分布の分散  $\sigma$  とする。つまり、

$$\sigma(\mathbf{a}) = \frac{1}{|S|} \sum_{i \in S} (\pi_i - \bar{\pi}_i)^2 \quad (3)$$

である。ここで  $\bar{\pi}_i$  は  $\bar{\pi}_i = \frac{1}{|S|} \sum_{i \in S} \pi_i$  である。

### 2.1. 施設密集度最適化手法

次に、施設密集度を最適化する方法を提案する [2]。施設密集度は各状態の定常分布の分散であることから、この分散を最小化することで、施設の密集度は軽減すると考えられる。ここで、施設内の平均滞在時間の和は、施設利用の妨げにならないように一定とする。  $\mathbf{a}'$  は  $\mathbf{a}$  の初期値である。

$$\text{minimize } \sigma(\mathbf{a}) = \frac{1}{|S|} \sum_{i \in S} (\pi_i(\mathbf{a}) - \bar{\pi}_i)^2 \quad (4)$$

$$\text{subject to } a_i \geq 0, a_i \in \mathbb{R}, i \in S$$

$$\sum_{i \in S} \frac{1}{a_i} = K, K \in \mathbb{R}$$

$$\mathbf{a}'(1 - \gamma) \leq \mathbf{a} \leq \mathbf{a}'(1 + \gamma), \gamma \in \mathbb{R}$$

## 2.2. 施設集中度最適化アルゴリズム

施設集中度最適化アルゴリズムは以下のようになる。

1. 推移確率行列  $P(t) = (p_{ij}(t)), i, j \in S$  を与える。また滞在時間パラメタ  $a_i, i \in S$  の初期値を設定する。
2. 式 (1) より、推移率行列  $Q$  を作成して、式 (2) より  $\pi_i, i \in S$  を求める
3. 最適化問題 (4) を解き、条件を満たす  $a$  を求める
4. 2 と 3 を繰り返し、最適な  $a$  を算出する

## 3. 数値計算例

ここで数値計算例を与える [3]。拠点数は 4 であり、推移確率行列  $P$  と滞在時間パラメタ  $a$  が下記のような連続時間型マルコフ連鎖を考える。

$$P = \begin{pmatrix} 0.0 & 0.7 & 0.3 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 1 & 0.0 \\ 0.33 & 0.0 & 0.0 & 0.67 \\ 1.0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$a = (4.00, 7.50, 3.00, 10.00)$$

このときの推移率行列  $Q$  は、

$$Q = \begin{pmatrix} -4.0 & 2.8 & 1.2 & 0.0 \\ 0.0 & -7.5 & 7.5 & 0.0 \\ 1.0 & 0.0 & -3.0 & 2.0 \\ 10.0 & 0.0 & 0.0 & -10.0 \end{pmatrix}$$

となる。この場合、定常分布は存在して次のようになる。

$$\pi = (0.336, 0.125, 0.448, 0.089)$$

この状態での施設集中度は 0.0219 となっている。ここから推移確率は変化させず、滞在時間パラメタを説明変数として施設集中度の最適化を行う。最適化に利用するパラメタは表 1 となる。今回は  $\gamma = 0.25$  として 25% の滞在時間パラメタの増減を許可している。また最適化で利用する収束に関するパラメタは scipy の BFGS のデフォルト設定となっている。この条件下で最適化を実施すると、

$$\hat{a} = (4.18, 5.62, 3.75, 7.50)$$

となり、最適化後の定常分布は、

$$\hat{\pi} = (0.332, 0.173, 0.370, 0.123)$$

となる。このときの施設集中度は 0.0108 となり、密集が改善されていることがわかる。

表 1: 最適化に利用するパラメタ値

項目	値
$\gamma$	0.25
平均滞在時間 $K$	0.817
最適化アルゴリズム	BFGS
プログラム言語	python3.7
利用ライブラリ	scipy1.5.0

## 4. おわりに

新型コロナウイルスの蔓延に対して、密の回避が求められている中、本研究では人やものの推移を変更することなく、滞在時間パラメタを変化させることで、密集の改善指標を得られることを示した。本予稿では簡易的な数値計算例を示したが、今後は実在するデータを利用して、各施設の実情に合わせた最適化結果を得ることが必要である。最適化結果から、シミュレーションを実施することで、感染者が発生した場合の感染拡大についても検討が可能になる。

## 謝辞

本研究は JSPS 科研費 JP21K11774 の助成を受けたものである。

## 参考文献

- [1] 宮沢政清: 確率と確率過程確率と確率過程, 近代科学社 (1993).
- [2] 大崎純: マルコフ連鎖モデルと遺伝的アルゴリズムによる施設配置最適化, 日本建築学会計画系論文集, vol. 63, no. 510, pp. 251–258 (1998).
- [3] Durrett, Richard: Essentials of stochastic processes. Vol. 1. New York: Springer, (1999).