

円内の半円間の距離分布

01102840 筑波大学 腰塚武志 KOSHIZUKA Takeshi

1. はじめに

これまでいくつかの領域で領域内距離分布を論じてきた。距離分布を導く基本公式 [文献 [2]] による計算は、円のように中心からの対称性が高いと容易である。そうでないものとして、領域が楕円の場合について筆者は文献 [1] で述べた。ここではその続きとして、円内の半円間の距離分布について論ずる。

2. 円内の半円間の距離分布

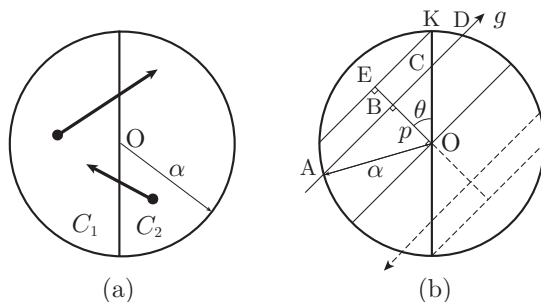
図1 円内の分割された半円 C_1, C_2 間の距離分布

図1(a)のように半径 α の円を直径で2つの半円 C_1 と C_2 に分割し、この半円間の距離分布を求めてみよう。ここでは直線 g におろす垂線 p の方向を p 軸とよぶことにし、これと半円を区切っている垂直な直径との角度を図1(b)のように θ とおく。

まず $0 < \theta < \pi/2$ のときは図1(b)のようになり、 p 軸に垂直な直線 g と半円 C_1 の円弧との交点を A、 p 軸との交点を B、境界である垂直な直径との交点を C、半円 C_2 の円弧との交点を D とする。また p 軸で p を大きくして行って g が半円 C_2 を通らなくなる寸前、すなわち C_2 の境界 K を通るときの p 軸の点を E とする。すると g 上の距離分布は線分 AC と線分 CD 間で考えればよい。そこで g に下した垂線 OB の長さを p で表すと、線分間の距離分布 (文献 [2]) において $h = 0$ 、長辺の長さ a 短辺の長さ b は、例えば線分 AC の長さを \overline{AC} で表すものとして

$$\begin{aligned} a &= \overline{AC} = \overline{AB} + \overline{BC} = \sqrt{\alpha^2 - p^2} + p \tan \theta \\ b &= \overline{CD} = \overline{BD} - \overline{BC} = \sqrt{\alpha^2 - p^2} - p \tan \theta \\ a + b &= \overline{AD} = 2\sqrt{\alpha^2 - p^2} \end{aligned} \quad (1)$$

と表すことができる。そして線分 OE の長さ \overline{OE} は $\alpha \cos \theta$ となるので、 p の範囲は $0 < p < \alpha \cos \theta$ となっている。

つぎに $\pi/2 < \theta < \pi$ のとき、さらに $\pi < \theta < 3\pi/2$ および $3\pi/2 < \theta < 2\pi$ のときは説明を略すが g 上の線分間の距離分布は $0 < \theta < \pi/2$ のときの距離分布に等しい。そこで距離分布の基本公式 (文献 [2]) における dG すなわち $dp d\theta$ による積分で $d\theta$ の部分を $0 < \theta < 2\pi$ の範囲ではなく $1/4$ の $0 < \theta < \pi/2$ の範囲で計算し、あとで4倍することにする。そして線分間の距離分布を $f_h(r, p, \theta)$ とおき、 $a, b, a+b$ が式 (1) のようになっているとすると

$$f_h(r, p, \theta) = \begin{cases} 2r & (0 < r \leq b \text{ のとき}) \\ 2b & (b < r \leq a \text{ のとき}) \\ 2(a+b-r) & (a < r < a+b \text{ のとき}) \end{cases} \quad (2)$$

が得られる。これをある角度 θ で固定して描くと図2のようになる..

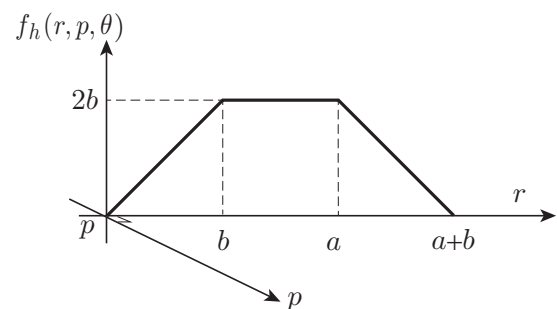
図2 p, θ が定まったときの g 上の距離分布 (2)

図2はある p の値の断面図であるが、この図で表された3次元の図を p で積分し、その後 θ で積分すると求めたい距離分布に近づく。ここでは詳しく述べるスペースがないので得られた結果だけを以下に記す。

3. 計算結果

まず結果を簡潔に記すために

$$\begin{aligned} p_1 &= -r \cos \theta \sin \theta + \cos \theta \sqrt{\alpha^2 - r^2 \cos^2 \theta}, \\ p_2 &= r \cos \theta \sin \theta - \cos \theta \sqrt{\alpha^2 - r^2 \cos^2 \theta}, \\ p_3 &= r \cos \theta \sin \theta + \cos \theta \sqrt{\alpha^2 - r^2 \cos^2 \theta} \end{aligned}$$

とおく. そして積分 $\int f_h(r, p, \theta) dp$ について $0 < \theta \leq \pi/6$ のときの結果を $f_1(r, \theta)$, $\pi/6 < \theta \leq \pi/4$ のときを $f_2(r, \theta)$, $\pi/4 < \theta < \pi/2$ のときを $f_3(r, \theta)$ で表す. まず $f_1(r, \theta)$ については

$$f_1(r, \theta) = \begin{cases} 0 < r \leq 2\alpha \sin \theta \text{ のとき} \\ p_1 r + \alpha^2 \left(\frac{\pi}{2} - \theta \right) - \alpha^2 \arcsin \frac{r}{\alpha}, \\ 2\alpha \sin \theta < r \leq \alpha \text{ のとき} \\ p_1 r + p_3 r - \alpha r \sqrt{1 - \left(\frac{r}{2\alpha} \right)^2} - \alpha^2 \arcsin \frac{r}{\alpha} \\ - \alpha^2 \arcsin \frac{p_3}{\alpha} + 2\alpha^2 \arcsin \sqrt{1 - \left(\frac{r}{2\alpha} \right)^2}, \\ \alpha < r \leq \alpha / \cos \theta \text{ のとき} \\ -p_2 r + p_3 r - \alpha r \sqrt{1 - \left(\frac{r}{2\alpha} \right)^2} + \alpha^2 \arcsin \frac{p_2}{\alpha} \\ - \alpha^2 \arcsin \frac{p_3}{\alpha} + 2\alpha^2 \arcsin \sqrt{1 - \left(\frac{r}{2\alpha} \right)^2}, \\ \alpha / \cos \theta < r < 2\alpha \text{ のとき} \\ -\alpha r \sqrt{1 - \left(\frac{r}{2\alpha} \right)^2} + 2\alpha^2 \arcsin \sqrt{1 - \left(\frac{r}{2\alpha} \right)^2} \end{cases} \quad (3)$$

となっている. ついで $f_2(r, \theta)$ については

$$f_2(r, \theta) = \begin{cases} 0 < r \leq \alpha \text{ のとき} \\ p_1 r + \alpha^2 \left(\frac{\pi}{2} - \theta \right) - \alpha^2 \arcsin \frac{r}{\alpha}, \\ \alpha < r \leq 2\alpha \sin \theta \text{ のとき} \\ -p_2 r + \alpha^2 \left(\frac{\pi}{2} - \theta \right) + \alpha^2 \arcsin \frac{p_2}{\alpha}, \\ 2\alpha \sin \theta < r \leq \alpha / \cos \theta \text{ のとき} \\ -p_2 r + p_3 r - \alpha r \sqrt{1 - \left(\frac{r}{2\alpha} \right)^2} + \alpha^2 \arcsin \frac{p_2}{\alpha} \\ - \alpha^2 \arcsin \frac{p_3}{\alpha} + 2\alpha^2 \arcsin \sqrt{1 - \left(\frac{r}{2\alpha} \right)^2}, \\ \alpha / \cos \theta < r < 2\alpha \text{ のとき} \\ -\alpha r \sqrt{1 - \left(\frac{r}{2\alpha} \right)^2} + 2\alpha^2 \arcsin \sqrt{1 - \left(\frac{r}{2\alpha} \right)^2} \end{cases} \quad (4)$$

と書くことができる. そして最後の $f_3(r, \theta)$ は

$$f_3(r, \theta) = \begin{cases} 0 < r \leq \alpha \text{ のとき} \\ p_1 r + \alpha^2 \left(\frac{\pi}{2} - \theta \right) - \alpha^2 \arcsin \frac{r}{\alpha}, \\ \alpha < r \leq 2\alpha \sin \theta \text{ のとき} \\ -p_2 r + \alpha^2 \left(\frac{\pi}{2} - \theta \right) + \alpha^2 \arcsin \frac{p_2}{\alpha}, \\ 2\alpha \sin \theta < r < 2\alpha \text{ のとき} \\ -\alpha r \sqrt{1 - \left(\frac{r}{2\alpha} \right)^2} + 2\alpha^2 \arcsin \sqrt{1 - \left(\frac{r}{2\alpha} \right)^2} \end{cases} \quad (5)$$

である. そこで求めたい円内の半円間の距離分布を $f(r)$ とすると, 基本公式 (文献 [2]) より

$$f(r) = 4r \left(\int_0^{\pi/6} f_1(r, \theta) d\theta + \int_{\pi/6}^{\pi/4} f_2(r, \theta) d\theta + \int_{\pi/4}^{\pi/2} f_3(r, \theta) d\theta \right) \quad (6)$$

が求められる.

式 (6) の積分は難しいので数値積分によって求めると, 半円間の距離分布は図 3 のようになる. この図にはこの半円同士を含む円全体の距離分布も f_c として表示してある. また, これより距離の平均値を求めると

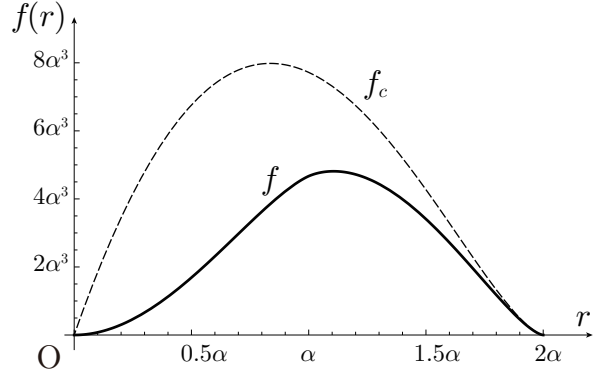


図 3 半円間の距離分布: f と円全体の距離分布: f_c (破線)

$$\bar{r} \approx 1.105\alpha \quad (7)$$

と計算され, 半径 α より 1 割ほど大きい値になることが分かった.

4. おわりに

領域内の距離分布を理論的に求めようとする, 限られた幾何学的な図形でしか解を得ることができない. これまでに得られているのは円, 長方形, 楕円, 2つの同心円によって形成される内側の円とそれを除いた外周部との距離分布である. そこでこれらに加えるべきものとして半円を選んだ. ここで述べたのは半円間の距離分布であるが, 図 3 において円全体の分布 f_c から半円間の距離分布 f を引けば半円内の距離分布を導出できる. もう少し正確にいうと $f_c(r) - f(r)$ は図 1(a) の C_1 内と C_2 内の距離分布を足したものであり, 半円同士は合同だから $\{f_c(r) - f(r)\}/2$ が 1 つの半円の距離分布となる. もちろんここで述べた半円間の距離分布が正しくて初めて成り立つものであるが, 半円内も理論的に計算し両者が正しいことを確かめてある.

参考文献

- [1] 腰塚武志: 楕円内の距離分布, 日本オペレーションズ・リサーチ学会春季研究発表会アブストラクト集, 2C1(2021).
- [2] 腰塚武志: 『距離分布から見る空間』, 筑波大学出版会 (2021). (予定).