一般化フィボナッチ数列と二項定理を用いた貴金属比の類似比の幾何学的考察
― ガウス平面を応用した等角螺旋の等角写像デザイン ―

01405264　大阪工業大学　　*中西　真悟　　　NAKANISHI Shingo

1. はじめに

本研究は, 2021 年 OR 春季研究発表会[1][2], EURO2021 のセッション「OR と芸術, 創造性 (図 1 ($n=1,2,3$ は黄金比，白銀比，青銅比に相当)）」[3]を基礎に一部を簡易的にまとめたものである．春季大会ではケプラー三角形を用いた代数螺旋や，個性ある直角三角形をベースとしたピタゴラスの定理を用いた標準正規分布の累積分布関数の積分形の傾き[4-6]による n 番目の貴金属比の類似比 m_n とその一般化フィボナッチ数列

$$F_{n,0}=0,\qquad F_{n,1}=1,\qquad F_{n,j}=F_{n,j-1}+n\cdot F_{n,j-2}$$

$$m_n^{j+2}=m_n^{j+1}+nm_n^{j},\ \ m_n\Phi(k_n)^2=1,\quad (j=\cdots,-2,-1,0,1,2,\cdots),(n=1,2,\cdots) \tag{1}$$

$$F_{n,j}=\frac{1}{\sqrt{1+4n}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{1+4n}}{2}\right)^j-\left(\frac{1-\sqrt{1+4n}}{2}\right)^j\right)=\frac{(m_n^j-(1-m_n)^j)}{m_n-(1-m_n)}=\sum_{l=0}^{j-1}m_n^l(1-m_n)^{j-1-l}$$

$$\because\left|\begin{pmatrix}F_{n,2} & nF_{n,1}\\ F_{n,1} & nF_{n,0}\end{pmatrix}-m_n\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\right|=\left|\begin{pmatrix}1 & 1\times n\\ 1 & 0\end{pmatrix}-m_n\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\right|=m_n^2-m_n-n=0$$

が描く等角螺旋を幾何学的に考察した．ところで， m_n と n は，その解の公式や多重根号や連分数を用いて

$$m_n^2-m_n=m_n(m_n-1)=n,\qquad (n=1,2,\cdots), \tag{2}$$

$$m_n(m_n-1)=\left(\sqrt{n+\sqrt{n+\sqrt{n+\sqrt{n+\sqrt{n+\sqrt{n+\cdots}}}}}}\right)\left(\sqrt{n-\sqrt{n-\sqrt{n-\sqrt{n-\sqrt{n-\sqrt{n-\cdots}}}}}}\right)=n,$$

$$m_n(m_n-1)=\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{1+4n}}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{1+4n}}{2}\right)=\left(1+\cfrac{n}{1+\cfrac{n}{1+\cfrac{n}{1+\cfrac{n}{1+\cfrac{n}{1+\cdots}}}}}\right)\left(\cfrac{n}{\cfrac{n}{\cfrac{n}{\cfrac{n}{\cfrac{n}{\cdots-1}-1}-1}-1}-1}-1\right)=n$$

と対称性が表記できる．この特徴が数学的にも芸術的にも美しいので，本報では二項定理も応用して

$$z_n^x=\left(1+i\sqrt{n}\Phi(k_n)\right)^x\ \text{and}\ \ \bar{z}_n^x=\left(1-i\sqrt{n}\Phi(k_n)\right)^x \tag{3}$$

$$\text{or}\ \ z_n^x=\sqrt{m_n}^x\exp\left(i\arccos\left(\frac{1}{\sqrt{m_n}}\right)x\right)=\sqrt{m_n}^x\left(\cos\left(\arccos\left(\frac{1}{\sqrt{m_n}}\right)x\right)+i\sin\left(\arccos\left(\frac{1}{\sqrt{m_n}}\right)x\right)\right)$$

をガウス平面（図 2）でも試みた等角螺旋（ベルヌーイの対数螺旋）の成果を紹介する．さらに，貴金属比の類似比とは何かを OR のアルゴルズムでもある再帰で取り扱い視覚化したい（$n=2$ はヤコブスタール数列）.

2. 貴金属比の類似比に関わる等角螺旋の等角写像

$$\frac{z_n^{x+1}}{z_n^x}\cdot\frac{z_n^{x+1}}{z_n^{x+1}}\cdot\frac{z_n^{x+1}}{z_n^{x+2}}=z_n^1\cdot\frac{z_n^1}{z_n^1}\cdot\frac{z_n^1}{z_n^2}=z_n^1\cdot z_n^0\cdot z_n^{-1}=\left(1+i\sqrt{n}\Phi(k_n)\right)\cdot 1\cdot\left(\frac{1-i\sqrt{n}\Phi(k_n)}{1+n\Phi(k_n)^2}\right)=1 \tag{4}$$

は等角写像の基本的考え方の一つである．また,

$$z_n^{-1}=\frac{\bar{z}_n^1}{|z_n^1|^2}=\frac{1-i\sqrt{n}\Phi(k_n)}{1+n\Phi(k_n)^2} \tag{5}$$

であるので，$\bar{z}_n$ を実軸に鏡映する等角螺旋の等角写像が鍵となる．このとき，接続点 (1,0) を基準に直線と円が描ける（図 3 右）．加えて，二項定理により

等角螺旋を考察して，パスカルの三角形を応用した

$$m^x = |z_n|^{2x} = (z_n \cdot \bar{z}_n)^x = (1 + n\Phi(k_n)^2)^x \quad (6)$$

を示せ，貴金属比の類似比で導出した一般化フィボナッチ数列と等角螺旋の相性はとても良い（図 3）.

参考文献

[1] 中西真悟, “標準正規分布の累積分布関数を傾きとする黄金比や貴金属比の類似比（その 1） ケプラー三角形，ピタゴラスの定理，平方および代数螺旋の再考”, 2021 年 OR 学会春季研究発表会予稿集, 2-E-10, (2021)

[2] 中西真悟, “標準正規分布の累積分布関数を傾きとする黄金比や貴金属比の類似比（その 2）フィボナッチ数列の拡張とフラクタルを目指した等角螺旋デザイン”, 2021 年 OR 学会春季研究発表会予稿集, 2-E-11, (2021)

[3] Shingo Nakanishi, “Visualizations of discrete equiangular spirals based on similar metallic ratios using Pythagorean theorem and weighted Fibonacci sequences”, EURO2021, No.936, (2021)

[4] 中西真悟, 大西匡光, “Rotationally Symmetric Relations of Standard Normal Distribution Using Right Triangles, Circles, and Squares : Ordinary Differential Equations, Pythagorean Theorem, Equilateral Triangles, and Golden Ratio”, 京都大学数理解析研究所講究録, No. 2158, pp.171-183, (2020).

[5] 中西真悟, “標準正規分布の幾何学的対称性 — 三平方の定理による累積確率評価 —”, 大阪工業大学イノベーションデイズ 2020, https://www.research.oit.ac.jp/sangaku/event/OITID-2020/seeds/seeds-4444/, (2020).

[6] 中西真悟, “ピタゴラスの定理と標準正規分布に基づく螺旋および等角図の幾何学的考察 — 三角形と正方形や貴金属比の類似比によるアプローチ—”, 大阪工業大学図書館紀要, Vol. 65, No. 2, pp.103-127, (2021).

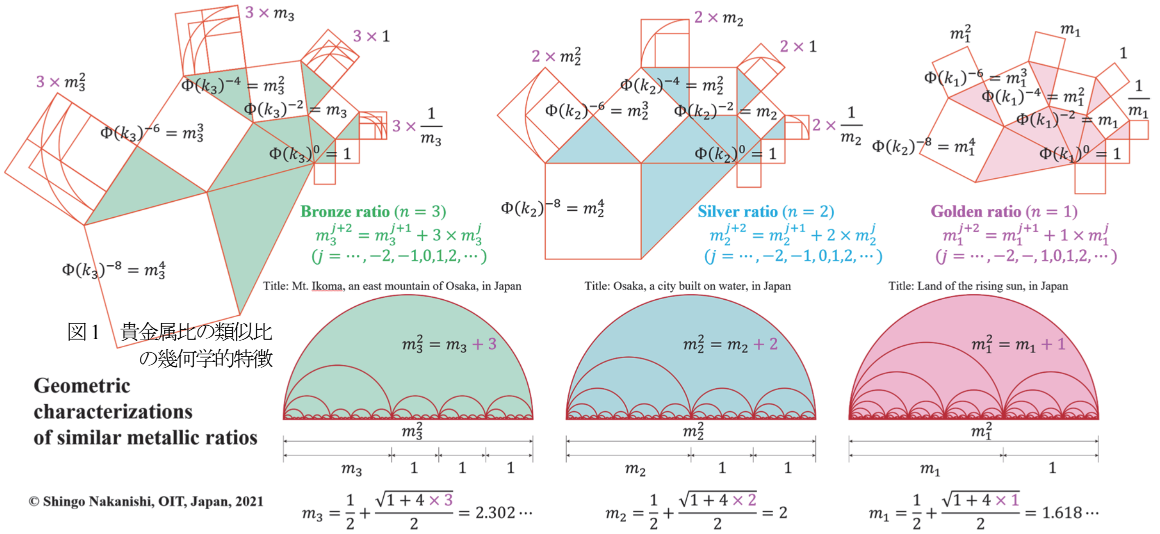


図 1 貴金属比の類似比の幾何学的特徴

Geometric characterizations of similar metallic ratios

© Shingo Nakanishi, OIT, Japan, 2021

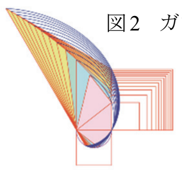
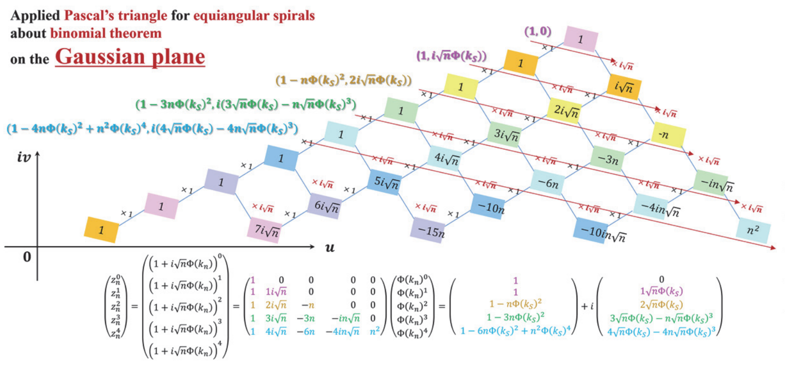
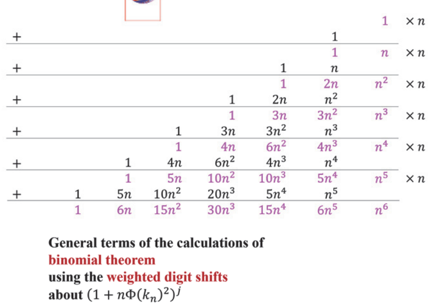
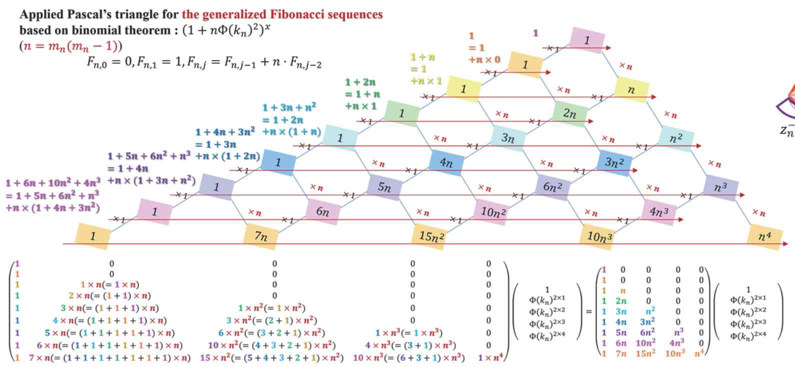


図 2 ガウス平面での等角螺旋 $n = 1, 2, \cdots, 12$ を例示





Original Ref. : EURO2021, No.936, OR and the Arts, Creativity



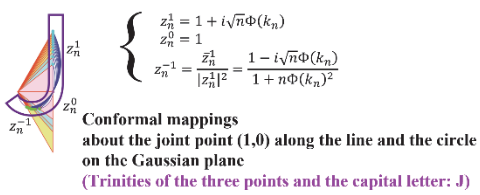


図 3 二項定理によるパスカル三角形の応用と一般化フィボナッチ数列の考え方の例図（3 点による三位一体の等角螺旋の等角写像図（大文字の J））