DM既約全域部分グラフ問題に対する近似アルゴリズムとFPTアルゴリズム

野呂瀬　龍馬，山口　勇太郎

所与の有向グラフから最小重みの強連結全域部分グラフを求める問題 (SCSS) は，強連結化問題の一般化であり，NP 困難である．SCSS に対して Frederickson and Jájá (1981) により，単純な 2 近似アルゴリズムが提案されている．また，重みなし SCSS に対しては，Bang-Jensen and Yeo (2008) により，最適値の自明な上界との差分をパラメータとした FPT アルゴリズムが提案されている．本稿では，それらの結果を 2 部グラフの Dulmage–Mendelsohn 分解に関する SCSS の一般化問題に対して拡張した筆者らの研究について解説する．

キーワード：連結度増大問題，2 部マッチング，マトロイド交叉，近似アルゴリズム，固定パラメータ容易性

1. はじめに

有向グラフ G において，任意の 2 頂点間に有向パスが存在するとき，G は**強連結**であるという．強連結化問題は，所与の有向グラフを強連結にするような最小重みの追加辺集合を求める問題である．Eswaran and Tarjan [1] は，ハミルトン閉路問題からの帰着により，一般の場合，強連結化問題が **NP 困難**であることを証明した．また，重みなしの場合（所与の有向グラフを強連結にするような最小本数の追加辺集合を求める問題）に対して，多項式時間アルゴリズムを提案した．他方で，Klinkby et al. [2] は，追加辺の本数をパラメータとして定式化したときに，強連結化問題が **FPT**（Fixed Parameter Tractable; 固定パラメータ容易）であることを示した．なお，ある問題に対して，計算可能な関数 f が存在して，入力のサイズ n とパラメータ k に関して計算時間 $f(k)\cdot n^{O(1)}$ のアルゴリズムが存在するとき，その問題は FPT であるという．また，そのようなアルゴリズムを **FPT アルゴリズム**と呼ぶ．

強連結化問題と相互に多項式時間帰着可能である**強連結全域部分グラフ問題** (Strongly Connected Spanning Subgraph; SCSS) は，所与の強連結な有向グラフと辺重みに対して，最小重みの強連結全域部分グラフを求める問題である．SCSS に対して，Frederickson and Jájá [3] は，2 近似アルゴリズムを与えた．これは非常に単純な観察（4.1 節を参照）に基づいており，驚くべきことに，1981 年に提案されて以降，SCSS に対する最善の近似率をもつアルゴリズムである．一方，重みなしの場合には，近似率 2 未満のアルゴリズム [4–7] が複数提案されている．また，最適値の自明な上界との差分をパラメータとした重みなし SCSS に対して，Bang-Jensen and Yeo [8] は，耳分解と呼ばれるグラフの分解を利用した FPT アルゴリズムを提案した．

本稿では，Frederickson and Jájá [3] と Bang-Jensen and Yeo [8] による SCSS に対するアプローチを，その一般化である **DM 既約全域部分グラフ問題** (DM-Irreducible Spanning Subgraph; DMISS) と呼ばれる問題に拡張した筆者らの研究成果 [9] について紹介する．

本稿の構成は以下のとおりである．2 節では，DMISS の定式化と主結果，および，強連結化問題のさまざまな一般化について紹介する．3 節では，DMISS に対する提案アルゴリズムの解説にあたって必要な用語などの説明を行う．4, 5 節では，それぞれ，DMISS に対する 2 近似アルゴリズムと，重みなし DMISS に対する FPT アルゴリズムについて解説する．最後に 6 節で，本研究のまとめと今後の展望を述べる．

2. 強連結化問題の一般化

2.1 DM 既約全域部分グラフ問題

強連結化問題の一般化の一つに，**DM 既約化問題**がある．2 部グラフの **Dulmage–Mendelsohn 分解**（**DM 分解**） [10, 11] は，グラフがもつすべての最大

のろせ　りょうま
キヤノン IT ソリューションズ（株）
〒 108–0075　東京都港区港南 2–16–6
norose.ryoma@canon-its.co.jp
やまぐち　ゆうたろう
大阪大学大学院情報科学研究科
〒 565–0871　大阪府吹田市山田丘 1–5
yutaro.yamaguchi@ist.osaka-u.ac.jp

マッチングの構造を反映した頂点集合の分割[1]である．2 部グラフの DM 分解がちょうど一つの成分からなるとき，そのグラフは **DM 既約**であるという．この性質は，通常の連結性と同様に，グラフに辺を追加しても維持される．DM 既約化問題は，所与の 2 部グラフを DM 既約にするような最小重みの追加辺集合を求める問題である．

DM 分解は行列の最も細かいブロック三角化を与え，計算効率の向上などに役立つ．それゆえ，その分解成分がちょうど一つであるという DM 既約性は一般に望まれない性質であるが，一方で，線形システムの構造可制御性の特徴付けなどの応用も知られている [12, 13]．

2 部グラフ $G = (V^+, V^-; E)$ は，$|V^+| = |V^-|$ のとき**平衡的**であるといい，そうでないとき**非平衡的**であるという．Bérczi et al. [12] は，入力の 2 部グラフ G が非平衡的である場合の DM 既約化問題に対して，**重み付きマトロイド交叉問題**に対するアルゴリズムを用いて，多項式時間アルゴリズムを提案した．また，G が平衡的である場合，重みなし問題が多項式時間で解けることを示した．

一般の場合，DM 既約化問題と相互に多項式時間帰着可能である問題として，**DM 既約全域部分グラフ問題** (DM-Irreducible Spanning Subgraph; DMISS) が次のように定式化される．なお，先述のとおり，入力グラフが非平衡的な 2 部グラフである DM 既約化問題（非平衡的な 2 部グラフに対する DMISS と等価）には多項式時間アルゴリズム [12] が存在しているため，本稿では入力グラフを平衡的な 2 部グラフに限定して考える．

問題 2.1 (DMISS).

入力： DM 既約な平衡的 2 部グラフ $G = (V^+, V^-; E)$，辺重み $w\colon E \to \mathbb{R}_{\geq 0}$.

目標： G の最小重み DM 既約全域部分グラフを求める．

平衡的な 2 部グラフに対する DMISS は，SCSS の一般化である．本稿で紹介する筆者らの研究結果は次のようにまとめられる．

定理 2.1. DMISS に対する計算時間 $O(n^3)$ の 2 近似アルゴリズムが存在する．ここで，$n = |V^+| = |V^-|$ である．

定理 2.2. 重みなし DMISS に対する，最適値の自明な上界との差分をパラメータとした FPT アルゴリズムが存在する．

2.2 その他の問題と関連研究

強連結化問題には，ほかにもさまざまな一般化が考えられている．有向グラフが k **辺連結**（あるいは k **連結**）であるとは，任意の 2 頂点間に辺素な k 本のパス（あるいは，端点を除いて点素な k 本のパス）が存在するような性質である．k 辺連結化問題（あるいは k 連結化問題）は，所与の有向グラフを k 辺連結（あるいは k 連結）にするような最小重みの追加辺集合を求める問題である．これらの問題は $k = 1$ の場合が強連結化問題にあたり，一般の場合，NP 困難であるが，重みなしの場合は任意の k に対してそれぞれ多項式時間アルゴリズム [14, 15] が与えられている．

k 辺連結化問題（あるいは k 連結化問題）と多項式時間帰着可能な問題として，k 辺連結（あるいは k 連結）な有向グラフから最小重みの k 辺連結（あるいは k 連結）全域部分グラフを求める問題が考えられる．k 辺連結全域部分グラフ問題に対する 2 近似アルゴリズム [16] や，k 連結全域部分グラフ問題に対する，近似率が k と頂点数の対数多項式で表される近似アルゴリズム [17] が提案されている．また，両者に対して，入力グラフの辺の本数との差分をパラメータにした FPT アルゴリズム[2] [18] が与えられている．

k 辺連結化問題や k 連結化問題，DM 既約化問題の共通の一般化として，優モジュラ関数の有向辺被覆問題があり，重みなしの場合に対する多項式時間アルゴリズムが与えられている [15]．

3. 準備

グラフに関する基本的な用語の定義や記法については，文献 [19] を参照のこと．有向グラフ $G = (V, E)$ の各有向辺 $e = (u, v) \in E$ に対して，対応する無向辺を $\overline{e} = \{u, v\}$ と表す．各辺集合 $F \subseteq E$ に対して，$\overline{F} \coloneqq \{\overline{e} \mid e \in F\}$ と定義する．

2 部グラフ $G = (V^+, V^-; E)$ において，$u \in V^+$, $v \in V^-$ であるような辺 $e = \{u, v\}$ に対して，その**向き付け**を $\overrightarrow{e} = (u, v)$, $\overleftarrow{e} = (v, u)$ と書くことにする．同様に，各辺集合 $F \subseteq E$ に対して，辺集合 $\overrightarrow{F}$

[1] 本稿では厳密な定義に立ち返ることを必要としないため，ここでは定義を省略する．詳細は文献 [12] などを参照せよ．

[2] 一般に（最適値）≤（自明上界）≤（辺数）が成り立つため，これは Bang-Jensen and Yeo [8] による重みなし SCSS に対する FPT アルゴリズムよりも弱いパラメータ化である．

と $\overleftarrow{F}$ を，それぞれ，辺 $e \in F$ の向き付け辺 $\overrightarrow{e}$ と $\overleftarrow{e}$ の集合として定義する．

無向グラフ G と頂点 $v \in V(G)$ に対して，v の**次数**を $\deg_G(v)$ で表す．**内向木**（または**外向木**）とは，ちょうど一つの頂点（**根**と呼ばれる）の出次数（または入次数）が 0 で，その他の各頂点の出次数（または入次数）が 1 であるような連結な有向グラフのことである．頂点 r を根とするような内向木（外向木）を r 内向木（r 外向木）と呼ぶ．

平衡的な 2 部グラフ $G = (V^+, V^-; E)$ の完全マッチング M に対して，M に関する G の**補助グラフ**を $G_M \coloneqq (V^+ \cup V^-, \overrightarrow{E} \cup \overleftarrow{M})$ と定義する．

本稿では，DM 既約性の特徴付けを，その「定義」として代用する．

補題 3.1. 平衡的 2 部グラフ G に対して，以下は同値である．

1. G は DM 既約である．
2. G のある完全マッチング M に対して，G_M は強連結である．
3. G は完全マッチングをもち，G の任意の完全マッチング M に対して，G_M は強連結である．

4. 近似アルゴリズム

本節では，筆者らが提案した DMISS に対する計算時間 $O(n^3)$ の 2 近似アルゴリズム（定理 2.1）を紹介する．

4.1 節では，提案手法の基となる，Frederickson and Jájá [3] による SCSS に対する 2 近似アルゴリズムを概説する．4.2 節では，その結果を素朴に拡張することで，DMISS に対する 3 近似アルゴリズムが得られることを示す．4.3 節では，マトロイド交叉を利用し，それを 2 近似アルゴリズムに改善できることを説明する．

4.1 SCSS に対する 2 近似アルゴリズム

まず，強連結な有向グラフに対して，次のような特徴付けが与えられる．

補題 4.1. 有向グラフ G に対して，以下は同値である．

1. G は強連結である．
2. ある頂点 r に対して，G は全域 r 内向木と全域 r 外向木をもつ．
3. 任意の頂点 r に対して，G は全域 r 内向木と全域 r 外向木をもつ．

本アルゴリズムは，SCSS の入力 $(G = (V, E), w)$ に対して，任意に頂点 $r \in V$ を選び，最小重みの全域 r 内向木 A_{in} と全域 r 外向木 A_{out} を求める（A_{in} と A_{out} の存在性は補題 4.1 (1 ⇒ 3) から従う）．また，$n = |V|$，$m = |E|$ とすると，計算時間は $O(m + n \log n)$ である [20]．補題 4.1 (2 ⇒ 1) より，A_{in} と A_{out} の和は G の強連結全域部分グラフであり，それを解として出力する．補題 4.1 (1 ⇒ 3) より，任意の最適解は，全域 r 内向木と全域 r 外向木をもち，それらの重みはそれぞれ A_{in} と A_{out} の重み以上である．したがって，本アルゴリズムが出力する解の重みは最適値の 2 倍以下である．

4.2 DMISS に対する 3 近似アルゴリズム

上記の結果を素朴に拡張することで，DMISS に対する 3 近似アルゴリズムが得られる．まず，補題 4.1 は次のように自然に拡張される（補題 3.1 を参照のこと）．

補題 4.2. 平衡的 2 部グラフ G に対して，以下は同値である．

1. G は DM 既約である．
2. ある完全マッチング M とある頂点 r に対して，G_M は全域 r 内向木と全域 r 外向木をもつ．
3. G は完全マッチングをもち，任意の完全マッチング M と任意の頂点 r に対して，G_M は全域 r 内向木と全域 r 外向木をもつ．

3 近似を達成するために，DMISS を次の二つの問題に分割する．(i)(G, w) において，最小重み完全マッチング M を求める問題．(ii) 入力が (G_M, w_M) で与えられる SCSS．ここで，$w_M \colon E(G_M) \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ は以下のように定義される．

$$w_M(e) \coloneqq \begin{cases} w(\overline{e}) & (\overline{e} \notin M), \\ 0 & (\overline{e} \in M). \end{cases} \tag{1}$$

前半部分 (i) に対して，Hungarian 法 [21] をはじめとした多項式時間アルゴリズムが知られている．後半部分 (ii) に対しては，前節の 2 近似アルゴリズムを適用する．最終的に，それらの解の和を出力する（後半部分の解に対しては，G の対応する辺の集合をとる）．(i) の解の重みは最適値以下であるため，これは DMISS に対する 3 近似アルゴリズムである（詳細な証明は文献 [9] を参照のこと）．

4.3 DMISS に対する 2 近似アルゴリズム

筆者らは，マトロイド交叉を用いて上記の 3 近似ア

ルゴリズムを改善した．

まず，簡単ではあるが重要な補題を与える．手短に言えば，補助グラフに含まれる任意の全域内向木はその完全マッチングの辺をすべて含む，ということである．

補題 4.3. $G = (V^+, V^-; E)$ を DM 既約な平衡的 2 部グラフ，M をその完全マッチングとし，r を V^+ の任意の頂点とする．このとき，G_M の任意の全域 r 内向木は，$\overleftarrow{M}$ のすべての辺を含む．

前節のアルゴリズムでは，本質的に次の三つの問題を解いている．(i) 最小重みの完全マッチングを求める問題．(ii) 最小重みの全域内向木を求める問題．(iii) 最小重みの全域外向木を求める問題．補題 4.3 に基づき，(i) と (ii) を次のような一つの問題に統合する．(G, w) において，完全マッチング M をもち，$\overrightarrow{T \setminus M} \cup \overleftarrow{M}$ が G_M の全域内向木であるような全域木のうち，最小重みのもの T を求める問題．

そのような全域木に対して，次のような特徴付けが観察される．

補題 4.4. 平衡的 2 部グラフ G の全域木 T に対して，以下は同値である．

1. T は G の完全マッチング M をもち，$\overrightarrow{T \setminus M} \cup \overleftarrow{M}$ は G_M の全域内向木である．
2. $\deg_T(r) = 1$ を満たす頂点 $r \in V^+$ が存在し，任意の頂点 $v \in V^+ \setminus \{r\}$ に対して，$\deg_T(v) = 2$ を満たす．

補題 4.4 の 2 を満たす全域木を**強平衡的** (Strongly Balanced) であるという．補題 4.2 と 4.4 より，任意の DM 既約なグラフは強平衡的な全域木をもち，前半部分の問題 (Strongly Balanced Spanning Tree with a Root; SBSTR) は次のように定式化できる．

問題 4.1 (SBSTR).

入力： DM 既約な 2 部グラフ $G = (V^+, V^-; E)$，辺重み $w\colon E \to \mathbb{R}_{\geq 0}$，頂点 $r \in V^+$．

目標： G の最小重み強平衡的全域木を求める．

DMISS に対する提案アルゴリズムの概要は以下のとおりである．

Step 1. 任意の頂点 $r \in V^+$ を選び，入力 (G, w, r) の SBSTR を解く．得られた解を T とし，その完全マッチングを M とする．

Step 2. (G_M, w_M) において，最小重みの全域 r 外向木 A_{out} を求める（w_M の定義は式 (1) を参照のこと）．

Step 3. $T \cup \overline{A_{\text{out}}}$ を出力する．

補題 4.2 より，この出力は DM 既約全域部分グラフである．以下では，提案アルゴリズムの計算時間と近似率について解析する．

4.3.1 計算時間

先述のとおり，Step 2（最小重みの全域外向木を求める問題）は，計算時間 $O(m + n \log n)$ [20] で解ける．

Step 1 (SBSTR) については，以下の補題が成り立つ（マトロイドの基礎的な説明は文献 [19] を参照のこと）．

補題 4.5. SBSTR は，重み付きマトロイド交叉問題である．

具体的には，SBSTR は閉路マトロイドと分割マトロイドの交叉によって記述される．一般に重み付きマトロイド交叉問題は多項式時間で解けることが知られているが，特に今回の特殊ケースに対しては，Brezovec et al. [22] のアルゴリズムを適用することで計算時間 $O(n^3)$ で解ける．

以上より，提案アルゴリズムの計算時間は $O(n^3)$ となる．なお，この計算時間について，本質的な改善は容易ではないと考えられる．SBSTR は，2 部グラフにおいて最小重み完全マッチングを求める問題と，有向グラフにおいて最小重みの全域内向木を求める問題の共通の一般化となっている．前者に対して，一般の場合に最良として知られている計算時間の上界は $O(n(m + n \log n))$ [23] であるが，これは密なグラフ $(m \approx n^2)$ の場合，$O(n^3)$ より良くはない．

4.3.2 近似率

最適解を S_{opt} とする．次の二つの補題から，$w(T \cup \overline{A_{\text{out}}}) = w(T) + w_M(A_{\text{out}}) \leq 2w(S_{\text{opt}})$ が示される（w_M の定義は式 (1) を参照のこと）．

補題 4.6. $w(T) \leq w(S_{\text{opt}})$.

証明 補題 4.2 と 4.3 より，S_{opt} は完全マッチング M_{opt} をもち，$\overleftarrow{M_{\text{opt}}} \subseteq A'_{\text{in}} \subseteq \overrightarrow{S_{\text{opt}}} \cup \overleftarrow{M_{\text{opt}}}$ であるような，$G_{M_{\text{opt}}}$ の全域 r 内向木 A'_{in} が存在する．入力が (G, w, r) で与えられる SBSTR に対して，T は最適解であり，$\overline{A'_{\text{in}}}$ は実行可能解であるため，$w(T) \leq w(\overline{A'_{\text{in}}}) \leq w(S_{\text{opt}})$ が成り立つ． □

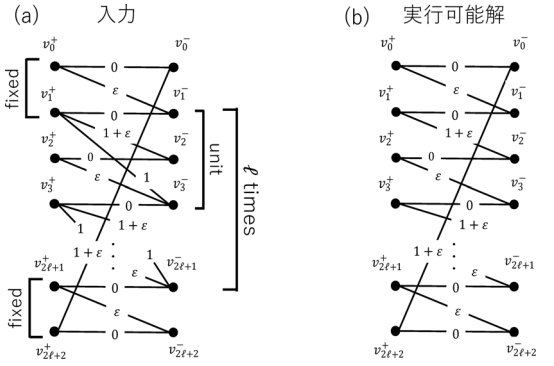

図 1　DMISS に対する 2 近似アルゴリズムのタイトな例

補題 4.7.　$w_M(A_{\mathrm{out}}) \le w(S_{\mathrm{opt}})$.

証明　G の部分グラフ $G' = (V^+, V^-; S_{\mathrm{opt}} \cup M)$ を考える．このとき，補題 4.2 より，G'_M は全域 r 外向木 A'_{out} をもつため，
$w_M(A_{\mathrm{out}}) \le w_M(A'_{\mathrm{out}}) \le w(\overline{A'_{\mathrm{out}}} \setminus M) \le w(S_{\mathrm{opt}})$
が成り立つ．□

上記の解析はタイトである．図 1 に示すような入力 (G, w) を考える．このグラフは以下のように構成される：

- $2(2\ell+3)$ 個の頂点 v_i^+, v_i^- $(i = 0, 1, \ldots, 2\ell+2)$,
- 重み 0 の $2\ell+3$ 本の辺 $\{v_i^+, v_i^-\}$ $(i = 0, 1, \ldots, 2\ell+2)$,
- 重み $1+\varepsilon$ の ℓ 本の辺 $\{v_{2i-1}^+, v_{2i}^-\}$ $(i = 1, 2, \ldots, \ell)$,
- 重み ε の ℓ 本の辺 $\{v_{2i}^+, v_{2i+1}^-\}$ $(i = 1, 2, \ldots, \ell)$,
- 重み 1 の ℓ 本の辺 $\{v_{2i-1}^+, v_{2i+1}^-\}$ $(i = 1, 2, \ldots, \ell)$,
- 重み ε の 2 本の辺 $\{v_0^+, v_1^-\}$ と $\{v_{2\ell+1}^+, v_{2\ell+2}^-\}$,
- 重み $1+\varepsilon$ の辺 $\{v_{2\ell+2}^+, v_0^-\}$.

ただし，ℓ は正整数であり，$\varepsilon := \frac{1}{\ell} > 0$ とする．

ここで，(b) に示したハミルトン閉路 $(v_0^-, v_0^+, v_1^-, v_1^+, \ldots, v_{2\ell+2}^-, v_{2\ell+2}^+, v_0^-)$ は実行可能解である．一方で，提案アルゴリズムの出力は，次に説明するように，(a) の入力グラフ全体となる．まず，重み 1 以下のすべての辺からなるグラフは，G の全域木を形成し，これは最小重みの全域木である（Kruskal のアルゴリズム [24] を考えてみよ）．さらにこれは，$r = v_{2\ell+2}^+$ の強平衡的全域木であるため，Step 1 の T として適当である．重み 0 の辺は完全マッチングを構成しており，それを M とすると，G_M の任意の全域外向木（Step 2 における A_{out} の候補）は，残りのすべての辺を含まなければならず，それは重み $1+\varepsilon$ の辺である．

以上より，提案アルゴリズムの近似率は少なくとも，

$$\frac{w(T \cup \overline{A_{\mathrm{out}}})}{w(S_{\mathrm{opt}})} \ge \frac{\ell(2+2\varepsilon) + 2\varepsilon + 1 + \varepsilon}{\ell(1+2\varepsilon) + 2\varepsilon + 1 + \varepsilon} = \frac{2\ell^2 + 3\ell + 3}{\ell^2 + 3\ell + 3} \to 2 \quad (\ell \to \infty)$$

である．

5. FPT アルゴリズム

本節では，筆者らが提案した重みなし DMISS に対する FPT アルゴリズム（定理 2.2）について概説する．

5.1 節では，提案手法の基となる，Bang-Jensen and Yeo [8] による重みなし SCSS に対する FPT アルゴリズムのアイデアを概説する．5.2 節では，それを拡張することで，重みなし DMISS に対する FPT アルゴリズムが得られることを簡単に紹介する．

5.1 重みなし SCSS に対する FPT アルゴリズム

n 頂点の有向グラフにおいて，任意の（辺の包含関係に関して）極小な強連結全域部分グラフは，高々 $2n-2$ 本の辺から構成される（補題 4.1 を参照のこと）．重みなし SCSS は，その自明な上界との差分をパラメータ k とし，所与の強連結なグラフが，$2n-2-k$ 本以下の辺からなる強連結全域部分グラフをもつかどうかを検証する判定問題として記述できる．

本アルゴリズムは，強連結な有向グラフに対する補題 4.1 とは別の特徴付けを利用している．有向グラフ $G = (V, E)$ に対して，G の**耳分解**とは，辺素なパスと閉路からなる列 $\mathcal{E} = (P_0, P_1, \ldots, P_f)$ であり，以下の条件を満たし，$E = \bigcup_{i=0}^{f} E(P_i)$ となるものをいう．

- P_0 は閉路である．
- P_i は，$\bigcup_{j=0}^{i-1} V(P_j)$ の異なる 2 頂点を端点とし，$V \setminus \bigcup_{j=0}^{i-1} V(P_j)$ の頂点を内点とするパス，または，$\bigcup_{j=0}^{i-1} V(P_j)$ とちょうど一つの頂点を共有するような閉路である．

各 P_i は**耳**と呼ばれる．

補題 5.1.　有向グラフが強連結であることと，耳分解をもつことは同値である．

本アルゴリズムのアイデアは以下のとおりである．はじめに，**長い**耳の集合が（包含関係に関して）極大になるように，入力グラフ G の耳分解 $\mathcal{E} = (P_0, P_1, \ldots, P_f)$ を求める．ただし，耳が長いとは，そのサイズ（辺の数）が 3 以上であることをいう．長い耳が十分に多い（k に依存）とき，耳分解 $\mathcal{E}$ からサイズ 1 の耳をすべて取り除くことで，十分に辺が少ない（すなわち $2n-2-k$

本以下であるような）強連結全域部分グラフを得ることができ，答えは yes となる．そうでないとき，$\mathcal{E}$ の長い耳に含まれる頂点の集合を X とする．$\mathcal{E}$ がすぐに解を与えないという仮定の下で，$|X| = O(k)$ を示すことができる．また，$\mathcal{E}$ の長い耳の極大性より，$V \setminus X$ の頂点は基本的にサイズ 2 の耳によって加えられており，これはある最小の強連結全域部分グラフに対しても同様に当てはまる．したがって，頂点集合 X（と小さな頂点部分集合）上の G の部分グラフに対する全探索により，解の存在を検証することができ，その候補数は $2^{O(k^2)}$ である．

5.2 重みなし DMISS に対する FPT アルゴリズム

$2n$ 頂点の平衡的 2 部グラフにおいて，任意の（辺の包含関係に関して）極小な DM 既約全域部分グラフは，高々 $3n-2$ 本の辺から構成される（補題 4.2 を参照のこと）．前節と同様に，重みなし DMISS を以下のように定式化できる（定義より，DM 既約な平衡的 2 部グラフは，少なくとも $2n = |V| = |V^+| + |V^-|$ 本の辺からなることに注意せよ）．

問題 5.1（**重みなし DMISS**）**.**

入力： DM 既約な平衡的 2 部グラフ $G = (V^+, V^-; E)$.

パラメータ： 整数 $k \leq n-2$.

目標： G が $3n-2-k$ 本以下の辺からなる DM 既約全域部分グラフをもつかどうかを検証する．

重みなし DMISS に対する FPT アルゴリズムの設計にあたり，耳分解による DM 既約な平衡的 2 部グラフの特徴付けを利用する．ここで，2 部グラフ $G = (V^+, V^-; E)$ の耳分解は前節と同様に定義される．また，以下の条件を満たす耳分解を**奇数プロパー**であるという．

- P_0 がサイズ 4 以上の閉路である．
- 各 P_i $(i = 1, 2, \ldots, f)$ が奇数サイズのパスである（これは，P_i の端点の片方が V^+ に含まれ，もう一方が V^- に含まれることを示唆している）．

補題 5.2（cf. 文献 [25](Theorem 4.1.6)）**.** 4 頂点以上からなる 2 部グラフが平衡的かつ DM 既約であることと，奇数プロパーな耳分解をもつことは同値である．

以下では，サイズ 5 以上の耳を**長い**という[3]．

提案アルゴリズムについて，簡単に説明を行う（詳細な解説は文献 [9] を参照のこと）．入力の DM 既約な平衡的 2 部グラフを $G = (V^+, V^-; E)$ とする．また，$n = |V^+|$, $m = |E|$ とし，$n \geq 2$ と仮定する．まず，以下の条件を満たすような奇数プロパーな耳分解 $\mathcal{E} = (P_0, P_1, \ldots, P_f)$ を求める（これは多項式時間で行える）．

- $\{P_1, P_2, \ldots, P_s\}$ は $\mathcal{E}$ の長い耳の集合であり，（包含関係に関して）極大である．
- $\{P_1, P_2, \ldots, P_r\}$ は，$\mathcal{E}$ のサイズ 1 以外の耳の集合である（$s \leq r \leq f$ に注意せよ）．

各 $i = 0, 1, \ldots, f$ に対して，頂点集合 $V(G_i) := \bigcup_{j=0}^{i} V(P_j)$ と辺集合 $E(G_i) := \bigcup_{j=0}^{i} E(P_j)$ からなる G の部分グラフ G_i を定義する．ここで，$X = V(G_s)$, $Y = V \setminus X$ とすると，以下の補題が成り立つ．

補題 5.3. G_r は，$(3n-2) - \left(\frac{|X|}{2} - s - 2\right)$ 本の辺からなる G の DM 既約全域部分グラフである．

補題 5.3 より，$k \leq \frac{|X|}{2} - s - 2$ ならば，(G, k) は yes インスタンスである．筆者らは，$k \geq \frac{|X|}{2} - s - 1$ と仮定した場合（このとき，定義より $|X| \geq 4s+4$ なので $|X| \leq 4k$ が成立する）においても，Bang-Jensen and Yeo [8] の手法を DM 既約性に合わせて調整することで，同様の全探索により FPT アルゴリズムが設計できることを示した．

6. まとめ

本稿では，DMISS に対する非自明な 2 近似アルゴリズムと，その重みなし問題に対する，最適値の自明な上界との差分をパラメータとした FPT アルゴリズムを解説した．

前者の結果は，SCSS に対する 2 近似アルゴリズム [3] の素朴な拡張を改善することで得られた．重要な観察は，問題の一部を重み付きマトロイド交叉問題として上手く切り出せたことであり，特殊なマトロイド交叉に対するアルゴリズム [22] を用いることで，計算時間 $O(n^3)$ のアルゴリズムを得た．

[3] 有向グラフにおける長さ ℓ のパスは，各頂点を入頂点と出頂点の二つに分割して無向化し，分割された各頂点対を辺で結んで得られる 2 部グラフにおける長さ $2\ell - 1$ のパスに対応する．前者における強連結性と後者における DM 既約性が同値である（文献 [12] を参照）ことを考えると，このように定義を修正するのは自然である．

後者の結果は，重みなし SCSS に対する FPT アルゴリズム [8] のアイデアを拡張することで得られた．5 節で述べた方向以外のパラメータ化アプローチとして，文献 [12] 同様の連結度増大問題を考える，すなわち，所与の 2 部グラフを DM 既約にするために追加する辺の本数をパラメータとするのも自然である．強連結化問題に対しては，2021 年に Klinkby et al. [2] がこのアプローチで初の FPT アルゴリズムを示した．この方向で DM 既約化問題に対する FPT アルゴリズムが存在するかどうかは未解決問題であるが，文献 [2] の結果を単純に拡張するのは困難だと考えられる．その一因として，結果として得られる DM 既約なグラフがもちうる完全マッチングの選択肢が多すぎることが挙げられ，これを突破する方法を考えることは今後の研究課題の一つである．

2 節で述べたとおり，優モジュラ関数の有向辺被覆問題は，強連結化問題のさまざまな一般化を内包するフレームワークである．現在のところ，その問題に対する定数近似アルゴリズムや FPT アルゴリズムが存在するかどうかは未解決である．本研究がその解明の一助となることを期待している．

参考文献

[1] K. P. Eswaran and R. E. Tarjan, “Augmentation problems,” *SIAM Journal on Computing*, **5**, pp. 653–665, 1976.

[2] K. V. Klinkby, P. Misra and S. Saurabh, “Strong connectivity augmentation is FPT,” In *Proceedings of the 32nd Annual ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms (SODA 2021)*, pp. 219–234, 2021.

[3] G. N. Frederickson and J. JáJá, “Approximation algorithms for several graph augmentation problems,” *SIAM Journal on Computing*, **10**, pp. 270–283, 1981.

[4] S. Khuller, B. Raghavachari and N. Young, “Approximating the minimum equivalent digraph,” *SIAM Journal on Computing*, **24**, pp. 859–872, 1995.

[5] S. Khuller, B. Raghavachari and N. Young, “On strongly connected digraphs with bounded cycle length,” *Discrete Applied Mathematics*, **69**, pp. 281–289, 1996.

[6] A. Vetta, “Approximating the minimum strongly connected subgraph via a matching lower bound,” In *Proceedings of the 12th Annual ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms (SODA 2001)*, pp. 417–426, 2001.

[7] L. Zhao, H. Nagamochi and T. Ibaraki, “A linear time 5/3-approximation for the minimum strongly-connected spanning subgraph problem,” *Information Processing Letters*, **86**, pp. 63–70, 2003.

[8] J. Bang-Jensen and A. Yeo, “The minimum spanning strong subdigraph problem is fixed parameter tractable,” *Discrete Applied Mathematics*, **156**, pp. 2924–2929, 2008.

[9] R. Norose and Y. Yamaguchi, “Approximation and FPT algorithms for finding DM-irreducible spanning subgraphs,” *arXiv*, arXiv:2404.17927, 2024.

[10] A. L. Dulmage and N. S. Mendelsohn, “Coverings of bipartite graphs,” *Canadian Journal of Mathematics*, **10**, pp. 517–534, 1958.

[11] A. L. Dulmage, “A structure theory of bipartite graphs of finite exterior dimension,” *Transactions of the Royal Society of Canada, Third Series, Section III*, **53**, pp. 1–13, 1959.

[12] K. Bérczi, S. Iwata, J. Kato and Y. Yamaguchi, “Making bipartite graphs DM-irreducible,” *SIAM Journal on Discrete Mathematics*, **32**, pp. 560–590, 2018.

[13] K. Murota, *Matrices and Matroids for Systems Analysis*, Springer, 2010.

[14] A. Frank, “Augmenting graphs to meet edge-connectivity requirements,” *SIAM Journal on Discrete Mathematics*, **5**, pp. 25–53, 1992.

[15] A. Frank and T. Jordán, “Minimal edge-coverings of pairs of sets,” *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, **65**, pp. 73–110, 1995.

[16] S. Khuller and U. Vishkin, “Biconnectivity approximations and graph carvings,” *Journal of the ACM*, **41**, pp. 214–235, 1994.

[17] Z. Nutov, “Approximating minimum-cost edge-covers of crossing biset-families,” *Combinatorica*, **34**, pp. 95–114, 2014.

[18] J. Bang-Jensen, M. Basavaraju, K. V. Klinkby, P. Misra, M. S. Ramanujan, S. Saurabh and M. Zehavi, “Parameterized algorithms for survivable network design with uniform demands,” In *Proceedings of the 29th Annual ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms (SODA 2018)*, pp. 2838–2850, 2018.

[19] A. Schrijver, *Combinatorial Optimization: Polyhedra and Efficiency*, Springer, 2003.

[20] H. N. Gabow, Z. Galil, T. Spencer and R. E. Tarjan, “Efficient algorithms for finding minimum spanning trees in undirected and directed graphs,” *Combinatorica*, **6**, pp. 109–122, 1986.

[21] H. W. Kuhn, “The Hungarian method for the assignment problem,” *Naval Research Logistics Quarterly*, **2**, pp. 83–97, 1955.

[22] C. Brezovec, G. Cornuéjols and F. Glover, “A matroid algorithm and its application to the efficient solution of two optimization problems on graphs,” *Mathematical Programming*, **42**, pp. 471–487, 1988.

[23] J. Edmonds and R. M. Karp, “Theoretical improvements in algorithmic efficiency for network flow problems,” *Journal of the ACM*, **19**, pp. 248–264, 1972.

[24] J. B. Kruskal, “On the shortest spanning subtree of a graph and the traveling salesman problem,” *Proceedings of the American Mathematical Society*, **7**, pp. 48–50, 1956.

[25] L. Lovász and M. D. Plummer, *Matching Theory*, American Mathematical Society, 1986.