不可分なタスクの公平配分理論

馬原　凌河

本稿では，まず前半で不可分なタスクの公平配分理論の基本的なトピックを紹介し，EF1 や EFX などの重要な公平性概念について解説する．後半では，関連する自身の最近の研究成果を概説する．

キーワード：公平配分理論，近似的な公平性，EF1，EFX

1. はじめに

公平配分理論とは，財およびタスクを複数のエージェント間で公平に配分するメカニズムを設計・解析する学問領域である．古典的な理論では，貨幣や領土などの分割可能性を仮定できる財（可分財）の配分に関する研究が中心であったが，近年，整数単位でしか量れないアイテム（不可分財，不可分なタスク）の公平配分が活発に研究されている．現代社会においては，財産分与，公的宿舎の割当，査読割当など，あらゆる場面で自然に現れる重要課題の一つである．

不可分なアイテムの公平配分理論は大まかに，財配分とタスク配分の二つに分類される．財配分では，物理的な資産やサービスを受ける権利など，人々にとって価値のあるものを扱う．一方，タスク配分では，家事の担当や特定の任務など，人々にとってコストのかかるものを扱う．本稿では，不可分なタスクの公平配分理論における基本的なトピックと自身の最近の研究成果について概説する．特に近年活発に研究されている近似的な公平性に関する話題を中心に紹介する．古典的な公平配分理論について詳しく知りたい方は文献 [1–3] などの教科書がある．また，不可分財の公平配分理論については，たとえば文献 [4, 5] などを参照されたい．さらに近年，財とタスクを混合したモデルについても研究が進められている．詳細については文献 [6] を参考にしてほしい．

本稿の構成は以下のとおりである．2 節で不可分なタスクの公平配分理論のモデルを定義し，古典的な公平性である無羨望について説明する．3，4 節では，近似的無羨望概念である EF1 と EFX について紹介する．5 節では公平性と効率性の両立について取り上げ，6 節では比例性とその近似について簡単に紹介する．7 節以降では自身の最近の研究成果について解説する．

まはら　りょうが
東京大学情報理工学系研究科
〒 113–8656 東京都文京区本郷 7–3–1
mahara@mist.i.u-tokyo.ac.jp

2. 問題設定

エージェントの集合を $N = \{1, \ldots, n\}$ とし，不可分なアイテム（タスク）の集合を $M = \{g_1, \ldots, g_m\}$ とする．各エージェント $i \in N$ は**コスト関数** $c_i \colon 2^M \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ をもつ．ただし，各 $i \in N$ について，$c_i(\varnothing) = 0$ とする．コスト関数が**加法的**であるとは，任意の $i \in N$ と任意の $S \subseteq M$ に対して，$c_i(S) = \sum_{g \in S} c_i(\{g\})$ が成り立つことをいう．$c_i(S)$ はエージェント i にとってのアイテム集合 S のコストを表す．コスト関数が**単調**であるとは，任意の $S \subseteq T$ に対して，$c_i(S) \leq c_i(T)$ が成り立つことをいう．簡単化のため，以降 $c_i(\{g\}), S\backslash\{g\}$ をそれぞれ $c_i(g), S \setminus g$ と略記する．

「公平な」アイテムの**配分** $X = (X_1, \ldots, X_n)$ を求めることがわれわれの目標である．ここで，$X_1, \ldots, X_n$ は M の分割であり，アイテム集合 X_i はエージェント i への配分を意味する．

さて，何をもって「公平」とするかは評価者の基準によって異なるため，公平性をどう定めるか自体が非自明な問題となる．ここでは，代表的な公平性の指標の一つである無羨望性 (Envy-freeness) について紹介する．

配分 $X = (X_1, \ldots, X_n)$ が**無羨望配分**であるとは，任意の $i, j \in N$ に対して，$c_i(X_i) \leq c_i(X_j)$ が成り立つことをいう．$c_i(X_i) > c_i(X_j)$ が成り立つとき，エージェント i はエージェント j を**羨む**という．すなわち，無羨望配分においては，どのエージェントも他のエージェントを羨まず，理想的な状態であると考えられる．

しかしながら，不可分なタスク（および財）の公平配分においては，無羨望配分の存在は必ずしも保証されない．実際，一つのアイテムを二人で分ける場合，どちらか一方にしか割り当てることができないため，必

ず羨みが生じる．このような問題を解消するための一つのアプローチとして，近似的な無羨望性を担保する方法が活発に研究されている．

さて，さきほどのアイテム一個を二人で分ける例を一般化した状況を考えてみよう．任意のエージェント $i \in N$ と任意のアイテム $g \in M$ に対して，$c_i(g) = 1$ であるとする．このとき，明らかに各エージェントに個数が均等になるように配分する方法が最も公平である．しかしながら，m が n で割り切れない場合は必ずアイテム一個分の誤差が生じてしまう．言いかえると，アイテム一個分の誤差を許容すれば，公平に配分されているといえる．では，より一般にコスト関数が一様でない場合はどうだろうか？ このような発想に基づいて考案された公平性が，EF1 や EFX などの近似的無羨望性である．

3. EF1

財配分のモデルにおいて，Budish [7] は EF1 (Envy-freeness up to one item) という近似的な無羨望性を提案した．その後，Conitzer et al. [8] はこの概念を拡張し，タスク配分における EF1 を提案した．配分 $X = (X_1, \ldots, X_n)$ が **EF1 配分**であるとは，任意の $i, j \in N$ に対して，$X_i = \varnothing$ または，あるアイテム $g \in X_i$ が存在して，$c_i(X_i \setminus g) \leq c_i(X_j)$ が成り立つことをいう．すなわち，EF1 配分においては，どのエージェントも（もし非空なアイテム集合をもっていれば）自身のあるアイテムを一つ取り除けば，他のエージェントを羨まないことが保証される．

各エージェントのコスト関数が加法的である場合は，EF1 配分は以下の Round-Robin アルゴリズム（図 1）により効率的に求められる [9].

Round-Robin アルゴリズム

1: **for** ラウンド $t = 1, \ldots, \lceil m/n \rceil$ **do**
2: 各エージェント $1, \ldots, n$ はこの順に，残りのアイテムの中で自身にとって最もコストの小さいアイテムを選ぶ．残りのアイテムがない場合，何も選ばない．
3: **return** 配分 X

定理 1. 各エージェントが加法的なコスト関数をもつとき，Round-Robin アルゴリズムは EF1 配分を計算する．

証明. 任意の相異なるエージェントのペア $i, j \in N$ を考える．もし $i < j$ ならば，各ラウンド t で，エージェント i が選ぶアイテムはエージェント j が選ぶアイテムより，i にとってコストが小さい．したがって，コスト関数の加法性から，$|X_i| = |X_j|$ のときは i は j を羨まず，$|X_i| = |X_j| + 1$ のときは i が最後に選んだアイテムを除けば，i は j を羨まない．次に $i > j$ のときを考える．各ラウンド t で，エージェント i が選ぶアイテムはエージェント j がラウンド $t+1$ で選ぶアイテムより，i にとってコストが小さい．したがって，コスト関数の加法性から，$|X_j| = |X_i| + 1$ のときは i は j を羨まず，$|X_j| = |X_i|$ のときは i が最後に選んだアイテムを除けば，i は j を羨まない． ■

	g_1	g_2	g_3	g_4	g_5
1	(0)	1	5	(6)	9
2	4	(5)	7	10	(6)
3	0	8	(8)	8	8

図 1 Round-Robin アルゴリズムの例
丸で囲まれたアイテムが順番にエージェントに選ばれていく．

コスト関数が（加法的とは限らない）単調関数の場合は，Lipton et al. [10] の Envy-Cycle Elimination アルゴリズムを改良した Top-Trading Envy-Cycle Elimination アルゴリズム [11] を用いて，EF1 配分を効率的に求められる．以下，このアルゴリズムについて説明する．**部分配分** $X = (X_1, \ldots, X_n)$ とは，$M' \subseteq M$ の配分のことをいう．すなわち，$X_1, \ldots, X_n$ は M' の分割であり，アイテム集合 X_i はエージェント i への配分を意味する．部分配分 X が与えられたとき，top-trading envy graph $G_X = (N, E)$ を次のように定義する．G_X は有向グラフであり，G_X の頂点集合はエージェントの集合 N に対応しており，任意の相異なる $i, j \in N$ に対して，$(i, j) \in E \Leftrightarrow$

$$c_i(X_j) = \min_{k \in N} c_i(X_k) \text{ かつ } c_i(X_i) > c_i(X_j)$$

と定める．すなわち，有向辺 (i, j) は，エージェント j がエージェント i にとって，$X_1, \ldots, X_n$ の中でコスト最小のアイテム集合を保持しており，かつ i が j を羨むことを意味する．このとき，次の補題が成り立つ．

補題 1. $X = (X_1, \ldots, X_n)$ を $M' \subseteq M$ の EF1 部分配分とし，G_X が有向サイクルをもつとする．このと

き，M' の EF1 部分配分 $X' = (X'_1, \ldots, X'_n)$ であって，$G_{X'}$ が有向サイクルをもたないものが存在する．

証明． G_X が有向サイクル C をもつとする．C に沿ってアイテム集合を交換した配分を X' とする．すなわち，C 上の各辺 (i,j) に対して，$X'_i = X_j$ とし，C 上にないエージェント k については，$X'_k = X_k$ とする．この操作によって，$G_{X'}$ における C 上のエージェントの出次数は 0 となり，それ以外のエージェントの出次数は変わらない．したがって，top-trading envy graph における辺数は少なくとも 1 減る．よって，この操作を高々 $O\left(n^2\right)$ 回繰り返せば，有向サイクルをもたない配分が得られる．また，この操作によって，EF1 が保たれることも容易に確かめられる． ■

さて，補題 1 を用いて，各エージェントのコスト関数が単調である場合に，以下の Top-Trading Envy-Cycle Elimination アルゴリズムにより EF1 配分が求められることを示そう．

Top-Trading Envy-Cycle Elimination アルゴリズム
1: $X = (\varnothing, \ldots, \varnothing)$ と初期化
2: **for** ラウンド $t = 1, \ldots, m$ **do**
3: 　**if** G_X が有向サイクルをもつ **then**
4: 　　サイクルを除去する．
5: 　G_X において出次数 0 のエージェントにアイテム g_t を配分する．
6: **return** 配分 X

定理 2. 各エージェントが単調なコスト関数をもつとき，Top-Trading Envy-Cycle Elimination アルゴリズムは，EF1 配分を計算する．

証明． ラウンド t に関する帰納法で示す．$X^t = \left(X_1^t, \ldots, X_n^t\right)$ をラウンド t の直後の（部分）配分とする．$X^0 = (\varnothing, \ldots, \varnothing)$ は自明に EF1 配分である．配分 X^{t-1} が EF1 配分であるとき，配分 X^t も EF1 配分であることを示せばよい．ラウンド t で有向サイクルを除去した後の配分を Y^{t-1} とする．補題 1 より，Y^{t-1} は EF1 配分である．ラウンド t でアイテム g_t を受け取ったエージェントを i とする．各エージェント $j \in N \setminus i$ については，配分 Y^{t-1} と配分 X^t の前後でアイテム集合が変わらないので，j からの EF1 を違反する羨みはない．一方，エージェント i については，

$$c_i\left(X_i^t \setminus g_t\right) = c_i\left(Y_i^{t-1}\right) \leq c_i\left(Y_j^{t-1}\right) = c_i(X_j^t)$$

より，EF1 を違反する羨みがない．ここで，不等号は，エージェント i が $G_{Y^{t-1}}$ において出次数 0 のエージェントであることから成立する． ■

4. EFX

EF1 は十分満足な公平性といえるだろうか？ たとえば，あるエージェントに非常に大きいコストのアイテムが配分された場合，その一つのアイテムが羨みの根本的な原因となりうる．しかし，EF1 ではコストの大きさにかかわらず，一つのアイテムを除いた後の羨みを考えているので，この根本的な原因を無視しているかもしれない．このように，EF1 はしばしば直感的に不公平になり得るという問題点が指摘されている．この問題に対処するため，EF1 よりも強力な近似的無羨望性が提案されている．

財配分のモデルにおいて，EF1 よりも強い自然な概念として，Caragiannis et al. [12] は EFX (Envy-freeness up to any item) を提唱した．Aleksandrov [9] はこの概念を拡張し，タスク配分における EFX を提案した．配分 $X = (X_1, \ldots, X_n)$ が **EFX 配分**であるとは，任意の $i, j \in N$ と任意の $g \in X_i$ に対して，$c_i(X_i \setminus g) \leq c_i(X_j)$ が成り立つことをいう．すなわち，EFX 配分においては，どのエージェントも，自身の任意のアイテムを一つ取り除けば，他のエージェントを羨望しないことが保証される．

定義から明らかに EFX 配分ならば EF1 配分である．図 1 の例を考えてみよう．さきほどの Round-Robin アルゴリズムを適用して得られた配分 $X = (\{g_1, g_4\}, \{g_2, g_5\}, \{g_3\})$ は EF1 配分であるが EFX 配分ではない．実際，EF1 配分であることは定理 1 から従う．また，エージェント 1 のエージェント 3 に対する羨みを考えると，$6 = c_1(\{g_1, g_4\} \setminus g_1) > c_1(g_3) = 5$ であるから，EFX の条件に違反することがわかる．一方，たとえば配分 $Y = (\{g_1, g_3\}, \{g_2, g_5\}, \{g_4\})$ を考えるとこの配分は EFX 配分となる（したがって，EF1 配分でもある）．

EF1 配分と同様に，EFX 配分の存在性は常に保証できるだろうか？ 実は，EFX 配分の存在性は（財配分，タスク配分のいずれにおいても）いまのところよくわかっておらず，不可分なアイテムの公平配分理論における最も難解な未解決問題の一つとして認識されている．いくつかの制限された場合については，EFX 配分の存在性が知られている．

4.1 先行研究

タスク配分における，EFX 配分の存在性に関するいくつかの先行研究を紹介する．Chen and Liu [13] はすべてのエージェントが同一の単調なコスト関数をもつ場合に EFX 配分が存在することを示した．この結果の系として，$n=2$ の場合に EFX 配分が存在することが容易に示される．Gafni et al. [14] は各エージェントのコスト関数がレベル関数であるとき，存在性を示した．ここで，レベル関数とは，$S,T\subseteq M$ に対して，$|S|<|T|\Longrightarrow c(S)<c(T)$ が成り立つことをいう．Aziz et al. [15] はアイテムが二種類のみの場合に存在性を示した．また，Li et al. [16] はすべてのエージェントのコスト関数が同一の選好順序である場合について存在性を示した．ここで，$i,j\in N$ に対して，i と j のコスト関数が**同一の選好順序**であるとは，任意の $g,g'\in M$ に対して，$c_i(g)<c_i(g')\Longleftrightarrow c_j(g)<c_j(g')$ であることをいう．Zhou and Wu [17] は $n=3$ で，各エージェントが同一の二値コスト関数をもつ場合について存在性を示している．

このように，非常に限定的な場合でのみ EFX 配分の存在性が示されているというのが現状である．一般の n,m であって各エージェントが同一の二値コスト関数をもつ場合や，$n=3$ で加法的なコスト関数をもつ場合でさえ EFX 配分が存在するかどうかは未解決である．

4.2 同一の加法的なコスト関数

この節では，どのエージェントも同一の加法的なコスト関数をもつ場合に EFX 配分を求めるアルゴリズムを紹介する．以下の貪欲アルゴリズムを考えてみよう．

貪欲アルゴリズム

1: コストが降順になるように各アイテムを整列する：$c(g_1)\geq\cdots\geq c(g_m)$．
2: $X=(\varnothing,\ldots,\varnothing)$ と初期化
3: **for** ラウンド $t=1,\ldots,m$ **do**
4: $\quad X_1,\ldots,X_n$ の中でコストの最も小さいアイテム集合にアイテム g_t を追加する．
5: **return** 配分 X

定理 3. 各エージェントが同一の加法的なコスト関数 c をもつとき，貪欲アルゴリズムは，EFX 配分を計算する．

定理 3 は，定理 2 の証明とほとんど同様の論法で示すことができるので証明は省略する．この結果の系として，$n=2$ で各エージェントが加法的なコスト関数をもつ場合に EFX 配分の存在性が示される．次の Cut-and-Choose アルゴリズムを考える．まず，エージェント 1 のコスト関数 c_1 に対して，$n=2$ として先の貪欲アルゴリズムを用いて EFX 配分を求める．その後，エージェント 2 が二つのアイテム集合のうち，コストの小さいアイテム集合を選び，残りをエージェント 1 が受け取る．すると，エージェント 1 はどちらのアイテム集合を受け取ったとしても EFX の条件を満たしており，エージェント 2 はエージェント 1 を羨まないので，EFX 配分となる．

5. 公平性と効率性の両立

この節では，資源配分の公平性と効率性について議論する．3〜4 節においては，近似的な公平性をどのように保証するかについて議論してきた．一方，多くの応用例において公平性だけを満たす配分方法は満足のいくものとはいえず，現実には効率性と公平性の両立が求められる．たとえば，何も配分しないという配分は羨みが発生しないため，無羨望配分となる．効率性とは，このような意味のない解を除外するための，社会全体の満足度を評価する基準のことである．

パレート最適性は最もよく考えられる効率性の基準の一つである．端的に言えば，パレート最適性とは，全員のコストが改善するような他の配分が存在しないような配分である．配分 X が配分 Y を**パレート支配**するとは，任意のエージェント i に対して，$c_i(X_i)\leq c_i(Y_i)$ が成り立ち，かつ少なくとも一人のエージェント j に対しては，$c_j(X_j)<c_j(Y_j)$ が成り立つことをいう．配分 X をパレート支配するような配分 Y が存在しないとき，X を**パレート最適な (PO) 配分**という．以下では，EF1 や EFX と PO を両立する研究について紹介する．

5.1 EF1+PO

コスト関数が加法的である場合に EF1+PO を満たす配分が存在するかどうかは未解決問題である．一方，財配分においては，そのような配分が常に存在することが知られている [12] が多項式時間で求められるかどうかは未解決である．タスク配分においては，$n=2$ [18] および $n=3$ [19] の場合は EF1+PO を満たす配分の存在が示されている．Garg et al. [20] はコスト関数が加法的な 0,1 値関数の場合に EF1+PO を満たす配分が常に存在することを示した．Aziz et al. [15] はアイテムが二種類のみの場合に EF1+PO を求める多項式時間アルゴリズムを設計している．また，Garg

	g_1	g_2	g_3
1	2	0	1
2	2	1	0

図 2　EFX+PO を満たす配分が存在しない例

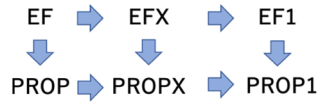

図 3　近似的公平性概念の関係図
EF，PROP はそれぞれ envy-freeness，proportionality を表す．

et al. [19] はコスト関数が二種類のみの場合に同様の結果を示している．

5.2　EFX+PO

財配分において，Plaut and Roughgarden [21] は図 2 の例を用いて，EFX + PO を満たす配分が必ずしも存在しないことを示している．この結果はタスク配分においても同様に示すことができる．実際，図 2 の例において，任意の PO 配分を考えると，g_2 はエージェント 1 に配分されなければならない．同様に，g_3 はエージェント 2 に配分されなければならない．このとき，いずれのエージェントに g_1 が配分されたとしても EFX 配分とはならないことは容易に確認できる．Garg et al. [19] はコスト関数が加法的な 0,1 値関数であり，かつ $n = 3$ の場合に EFX+PO を満たす配分が多項式時間で求められることを示している．

6.　比例性とその近似

無羨望配分とは別に，公平配分理論の中心的な公平性概念として，比例性 (proportionality) がある．配分 $X = (X_1, \ldots, X_n)$ が**比例配分**であるとは，任意の $i \in N$ に対して，$c_i(X_i) \leq c_i(M)/n$ が成り立つことをいう．無羨望配分と同様に，比例配分も存在するとは限らない．そこで，比例性についても近似的な概念がいくつか提案されている．Conitzer et al. [8] は PROP1 (Proportionality up to one item) という近似的比例性を提案した．配分 $X = (X_1, \ldots, X_n)$ が **PROP1 配分**であるとは，任意の $i \in N$ に対して，$c_i(X_i) \leq c_i(M)/n$ またはあるアイテム $g \in X_i$ が存在して，$c_i(X_i \setminus g) \leq c_i(M)/n$ が成り立つことをいう．コスト関数が加法的である場合は，EF1 配分は PROP1 配分となる．PROP1 より強い自然な概念として，Moulin [22] は PROPX (Proportionality up to any item) という近似的比例性を導入した．配分 $X = (X_1, \ldots, X_n)$ が **PROPX 配分**であるとは，任意の $i \in N$ と任意の $g \in X_i$ に対して，$c_i(X_i \setminus g) \leq c_i(M)/n$ が成り立つことをいう．Li et al. [16] は PROPX 配分を求める多項式時間アルゴリズムを設計している．これまで述べてきた近似的公平性概念の関係図を図 3 にまとめている．

7.　最近の研究

この節では小林佑輔，坂本壮太（敬称略）と共に行った最近の研究の結果 [23] を紹介する．この論文の主結果は以下のとおりである．不可分なタスクの公平配分問題に対して，各エージェントが加法的なコスト関数をもつ場合に，以下のそれぞれのケースで EFX 配分が常に存在することを示した．

(1) $m \leq 2n$ の場合
(2) 一人のエージェントを除いて，各エージェントのコスト関数が同一の選好順序である場合
(3) $n = 3$ で，各エージェントが（それぞれ異なってもよい）2 値コスト関数をもつ場

証明は構成的であり，いずれの場合についても EFX 配分を求める多項式時間アルゴリズムを与える．

8.　EFX グラフ

われわれはそれぞれの結果を示すために EFX グラフと呼ばれる二部グラフを新たに導入する．U をサイズ n の集合とし，$M' \subseteq M$ に対して，$X = (X_u)_{u \in U}$ を（M' の）U への配分とする．直感的には U は N のコピーの役割を果たしており，N への配分を考える代わりに U への配分とマッチングを考えることで，議論を簡単にする．EFX グラフ $G_X = (N, U; E)$ を次のように定義する．任意の $i \in N$ と $u \in U$ に対して，

$$(i, u) \in E \iff \max_{g \in X_u} c_i(X_u \setminus g) \leq \min_{k \in U} c_i(X_k)$$

と定める．つまり，$(i, u) \in E$ は，エージェント i にとって，$X = (X_u)_{u \in U}$ の中で X_u を受け取ったとすると，EFX の条件が満たされていることを意味する．特に，$X = (X_u)_{u \in U}$ が M の U への配分であり，次の条件 (P) を満たすならば，EFX 配分を求めることができる．

(P) G_X は完全マッチングをもつ

実際，各エージェントに，完全マッチングでマッチ

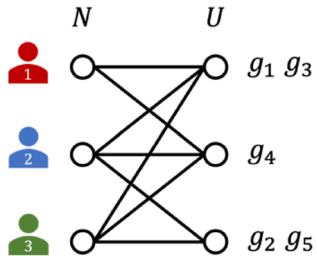

図 4　図 1 のインスタンスに対する EFX グラフの例

しているアイテム集合を配分すれば，EFX グラフの定義から，EFX 配分となる．図 4 は図 1 のインスタンスに対する EFX グラフの例である．

9.　主結果の証明

以下では，(1) と (2) に焦点を当てて，証明のアイデアを説明する．

9.1　$m \leq 2n$ の場合

もし，$m \leq n$ であれば，各エージェントに高々一つのアイテムを配分すれば EFX 配分となる．以下では，$m = n + l (1 \leq l \leq n)$ とする．われわれの基本的なアイデアは次のとおりである．

はじめに任意の $u \in U$ に対して，$X_u = \varnothing$ として U への配分 $X = (X_u)_{u \in U}$ をつくる．そして，条件 (P) を保ちながら，アイテムを一つずつ順に X のいずれかのアイテム集合へ追加する．もし，すべてのアイテムを配り終えたときに (P) を満たしていれば，EFX 配分を求めることができる．

しかしながら，適当な順番でアイテムを追加していくと一般には (P) を保持することはできない．そこで，はじめに l 人 (たとえば $1, \ldots, l$) がこの順 $(1, \ldots, l)$ に自分自身にとって最もコストの小さいアイテムを一つずつ選んで保持しておく．その後，残った n 個のアイテムで U への配分 $X = (X_u)_{u \in U}$ をつくる．ただし，任意の $u \in U$ に対して，$|X_u| = 1$ となるようにする．そして，先ほどとは逆の順 $(l, \ldots, 1)$ で，$X = (X_u)_{u \in U}$ の中で自身にとって最もコストの小さい集合へ保持しておいたアイテムを追加していく．すると，アイテムを追加していく操作において，(P) を絶えず保持することが帰納法によって示される．よって，すべてのアイテムを配分し終えた後も (P) が満たされるので，EFX 配分を求めることができる．

9.2　$1, \ldots, n-1$ のコスト関数が同一の選好順序である場合

本節では，N の代わりに $N \setminus n$ を一方の頂点集合としたものを $G_X = (N \setminus n, U; E)$ と定める．ただし，U のサイズは n である．ここでのわれわれのアイデアは，次の条件 (Q) を満たす配分を構成することである．

(Q) 任意の $u \in U$ に対して，$G_X - u$ が完全マッチングをもつ

もし，(Q) を満たす配分を構成できれば，次のように EFX 配分を求めることができる．まず，エージェント n へ $(X_u)_{u \in U}$ の中で n にとって最もコストの小さい集合 X_{u^*} を配分する．条件 (Q) より，$G_X - u^*$ はある完全マッチング A をもつ．そこで，A を用いて残った $n-1$ 人へ残りの $n-1$ 個のアイテム集合を配分する．

残された問題は (Q) を満たす配分を構成することであるが，実は $n-1$ 人のコスト関数が同一の選好順序を持つ場合，次のような単純な手順で求めることができる．はじめに，任意の $i \in N \setminus n$ に対して，$c_i(g_{k_1}) \geq \cdots \geq c_i(g_{k_m})$ となるようにアイテムをソートする．任意の $u \in U$ に対して $X_u = \varnothing$ として U への配分 $X = (X_u)_{u \in U}$ をつくる．そして，アイテムを $(X_u)_{u \in U}$ の中のいずれかのアイテム集合に一つずつ追加する．このとき実は，アイテムの追加前に (Q) を満たしていれば追加後も (Q) を満たすようなアイテム集合が少なくとも一つ存在することを示すことができる．よって，すべてのアイテムを配分し終えた後も (Q) が満たされるので，EFX 配分を求めることができる．

10.　まとめ

本稿では，不可分なタスクの公平配分理論における主要なトピックと自身の最近の成果について概説した．これまでの理論に基づいた応用例として，東京大学の五十嵐歩美氏らが開発した「家事分担コンシェルジュ」というアプリがある [24]．今後，このような理論研究が実社会に貢献することを大いに期待している．

謝辞　本研究 [23] は，京都大学とトヨタ自動車の共同研究プロジェクト「モビリティ基盤数理の研究」の支援を受けている．

参考文献

[1] S. J. Brams and A. D. Taylor, *Fair Division: From Cake-Cutting to Dispute Resolution*, Cambridge University Press, 1996.
[2] J. Robertson and W. Webb, *Cake-Cutting Algorithms: Be Fair If You Can*, 1998.

[3] H. Moulin, *Fair Division and Collective Welfare*, MIT press, 2004.
[4] 五十嵐歩美，馬原凌河，横山智彦，“不可分財の公平配分の理論と最近の動向，”システム／制御／情報，**67**, pp. 6–11, 2023.
[5] G. Amanatidis, H. Aziz, G. Birmpas, A. Filos-Ratsikas, B. Li, H. Moulin, A. A. Voudouris and X. Wu, “Fair division of indivisible goods: Recent progress and open questions,” *Artificial Intelligence*, **322**, 103965, 2023.
[6] S. Liu, X. Lu, M. Suzuki and T. Walsh, “Mixed fair division: A survey,” In *Proceedings of the 38th AAAI Conference on Artificial Intelligence (AAAI)*, pp. 22641–22649, 2024.
[7] E. Budish, “The combinatorial assignment problem: Approximate competitive equilibrium from equal incomes,” *Journal of Political Economy*, **119**, pp. 1061–1103, 2011.
[8] V. Conitzer, R. Freeman and N. Shah, “Fair public decision making,” In *Proceedings of the 18th ACM Conference on Economics and Computation (EC)*, pp. 629–646, 2017.
[9] M. Aleksandrov, “Almost envy freeness and welfare efficiency in fair division with goods or bads,” *arXiv*, arXiv:1808.00422, 2018.
[10] R. J. Lipton, E. Markakis, E. Mossel and A. Saberi, “On approximately fair allocations of indivisible goods,” In *Proceedings of the 5th ACM Conference on Electronic Commerce (EC)*, pp. 125–131, 2004.
[11] U. Bhaskar, A. Sricharan and R. Vaish, “On approximate envy-freeness for indivisible chores and mixed resources,” *arXiv*, arXiv:2012.06788, 2020.
[12] I. Caragiannis, D. Kurokawa, H. Moulin, A. D. Procaccia, N. Shah and J. Wang, “The unreasonable fairness of maximum Nash welfare,” *ACM Transactions on Economics and Computation (TEAC)*, **7**, Article No. 12, 2019.
[13] X. Chen and Z. Liu, “The fairness of leximin in allocation of indivisible chores,” *arXiv*, arXiv:2005.04864, 2020.
[14] Y. Gafni, X. Huang, R. Lavi and I. Talgam-Cohen, “Unified fair allocation of goods and chores via copies,” *arXiv*, arXiv:2109.08671, 2021.
[15] H. Aziz, J. Lindsay, A. Ritossa and M. Suzuki, “Fair allocation of two types of chores,” In *Proceedings of the International Conference on Autonomous Agents and Multiagent Systems (AAMAS)*, pp. 143–151, 2023.
[16] B. Li, Y. Li and X. Wu, “Almost (weighted) proportional allocations for indivisible chores,” In *Proceedings of the ACM Web Conference (WWW)*, pp. 122–131, 2022.
[17] S. Zhou and X. Wu, “Approximately EFX allocations for indivisible chores,” *arXiv*, arXiv:2109.07313, 2021.
[18] H. Aziz, I. Caragiannis, A. Igarashi and T. Walsh, “Fair allocation of indivisible goods and chores,” In *Proceedings of the 28th International Joint Conference on Artificial Intelligence (IJCAI)*, pp. 53–59, 2019.
[19] J. Garg, A. Murhekar and J. Qin, “New algorithms for the fair and efficient allocation of indivisible chores,” In *Proceedings of the 32nd International Joint Conference on Artificial Intelligence (IJCAI)*, pp. 2710–2718, 2023.
[20] J. Garg, A. Murhekar and J. Qin, “Fair and efficient allocations of chores under bivalued preferences,” In *Proceedings of the 36th AAAI Conference on Artificial Intelligence (AAAI)*, pp. 5043–5050, 2022.
[21] B. Plaut and T. Roughgarden, “Almost envy-freeness with general valuations,” *SIAM Journal on Discrete Mathematics*, **34**, pp. 1039–1068, 2020.
[22] H. Moulin, “Fair division in the internet age,” *Annual Review of Economics*, **11**, pp. 407–441, 2019.
[23] Y. Kobayashi, R. Mahara and S. Sakamoto, “EFX allocations for indivisible chores: Matching-based approach,” In *Proceedings of the 16th International Symposium on Algorithmic Game Theory (SAGT)*, pp. 257–270, 2023.
[24] 家事分担コンシェルジュプロジェクト，「家事分担コンシェルジュ」，https://kajishare.com（2024 年 5 月 9 日閲覧）