DEAの例解

森田　浩

DEA が European Journal of Operational Research に発表されてから 45 年になる [1]．1990 年代から 2000 年代にかけては盛んに研究がされていて，国際会議でも多くのモデルや解析理論の発表があった．近年は DEA のセッションはないこともあるが，DEA を活用した応用事例研究は多くあり，さまざまな分野で当たり前のように使われる手法になった．DEA の計算自体は難しいものではなく，比較的容易に適用することができる．そのため，得られた結果が意味するところやどういう仮定を置いて計算されているものかを知ることは大切である．本稿は一般的な書物とは異なる順序で DEA を説明しているので，こんな説明もあるのかと読んでもらえたらありがたい．

キーワード：データ包絡分析法，生産可能集合，効率性，規模の収穫

1. はじめに

DEA とは，Data Envelopment Analysis の略称である．これを直訳するならデータを包み込む分析法であり，日本語ではデータ包絡分析法あるいは単に包絡分析法と呼ばれている．多入力多出力の事業体の効率性を可変ウェイトによって評価するための手法として知られているが，データを包み込むこととどのようにつながっているだろうか．

DEA は，多面的な評価ができたり，改善目標を知ることができたりする．さらに，線形計画法の双対性などの優れた性質によって，さまざまな解析ができるのも DEA の魅力である．DEA がわが国で広く認知されたのは文献 [2] が出版されたのがきっかけであろう．残念ながら現在は絶版となったが，2022 年に文献 [3] が出版されている．

本稿では，データを包み込む生産可能集合の考え方から始めて，それからどのように効率性を評価しているのかを解説する．

2. 生産可能集合と効率性

m 個の入力と r 個の出力で表される活動を表現することを考える．今，n 個の DMU (Decision making unit) があり，j 番目の DMU の入力と出力の値は

$$x_j = (x_{1j}, x_{2j}, \ldots, x_{mj}), y_j = (y_{1j}, y_{2j}, \ldots, y_{rj})$$

と与えられるとする．一般に，小さい値が望ましいものを入力，大きい値が望ましいものを出力とする．入力 $x \in \Re^m_+$ から出力 $y \in \Re^r_+$ を産出できるとき生産可能であるといい，(x, y) の満たす集合 P を**生産可能集合** (Production possibility set) という．

もりた　ひろし
大阪大学大学院情報科学研究科
〒 565–0871 大阪府吹田市山田丘 1–5
morita@ist.osaka-u.ac.jp

入出力が (x_o, y_o) である DMU$_o$ の活動が非効率ということは，無駄な入力を投入していたり産出している出力が不足していたりすることを意味している．つまり，非効率な活動では入力を縮小したり出力を拡大したりしてもなお生産可能であるといえるため，$(\theta x_o, \phi y_o) \in P$ となる $\theta \leq 1, \phi \geq 1$ が存在する．

入力指向型では，$\phi = 1$ としてどれだけ入力を削減できるかを考える．

$$\begin{array}{lll} \langle \mathrm{I} \rangle & \text{Minimize} & \theta \\ & \text{subject to} & (\theta x_o, y_o) \in P \end{array}$$

最適値を θ^* とすると，入力を θ^* 倍しても生産可能集合に含まれる．$\theta^* < 1$ のときは削減できる入力があるため，非効率的といえる．一方，$\theta^* = 1$ のときは入力をわずかでも削減すると生産可能集合には含まれなくなるので，削減できる入力はなく，効率的といえる．

出力指向型では，$\theta = 1$ としてどれだけ出力を増加できるかを考える．

$$\begin{array}{lll} \langle \mathrm{O} \rangle & \text{Maximize} & \phi \\ & \text{subject to} & (x_o, \phi y_o) \in P \end{array}$$

最適値を ϕ^* とすると，出力を ϕ^* 倍しても生産可能集合に含まれる．$\phi^* > 1$ のときは出力を増やすことができるため，非効率的といえる．一方，$\phi^* = 1$ のときは出力をわずかでも増やすと生産可能集合には含まれなくなるので，増やすことができる出力はなく，効率的といえる．

このように効率的かどうかは生産可能集合 P に基づいて判断される．

3. 生産可能集合

3.1 生産可能集合

ここでは生産可能集合がどのように構成されるかを考察する．実在しているDMUは当然生産可能集合に含まれる．そして，実在しているDMUと比べてより多くの入力からより少ない出力を得る活動も可能であるため生産可能集合に含まれる．このときの生産可能集合 P は

$$P = \bigcup_{j=1}^{n} \left\{ (x, y) \,\middle|\, x \geq x_j, y \leq y_j \right\} \tag{1}$$

と書くことができる．DEAでは与えられた生産可能な活動より劣る入出力をもつ活動も生産可能であるとしている．この式(1)の生産可能集合 P を構成するために与えられた生産可能な活動は実在するDMUのみである．

n 個のDMUのデータを並べて入力行列 X と出力行列 Y を作る．

$$X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{in} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{m1} & x_{m2} & \cdots & x_{mn} \end{pmatrix}$$

$$Y = \begin{pmatrix} y_{11} & y_{12} & \cdots & y_{in} \\ y_{21} & y_{22} & \cdots & y_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{r1} & y_{r2} & \cdots & y_{rn} \end{pmatrix}$$

これらと0–1変数 $\lambda \in \{0,1\}^n$ を用いて，式(1)は

$$P = \left\{ (x, y) \,\middle|\, x \geq X\lambda, y \leq Y\lambda, e'\lambda = 1, \lambda \in \{0,1\}^n \right\} \tag{2}$$

と表すことができる．ここで，e は1を並べたベクトルである．$e'\lambda = 1$ は λ_j の和が1であることを表しており，λ_j のどれか一つのみが1を取る．この集合は実在しているDMUのみから構成され，FDH (Free disposal hull) モデルと呼ばれる[4].

式(2)における λ に関する0–1制約を非負制約のある連続変数に緩和すると，λ_i の和は1なので，複数のDMUの線形結合で表される中間的な活動も生産可能とみなすと仮定していることになる．

$$P = \left\{ (x, y) \,\middle|\, x \geq X\lambda, y \leq Y\lambda, e'\lambda = 1, \lambda \geq 0 \right\} \tag{3}$$

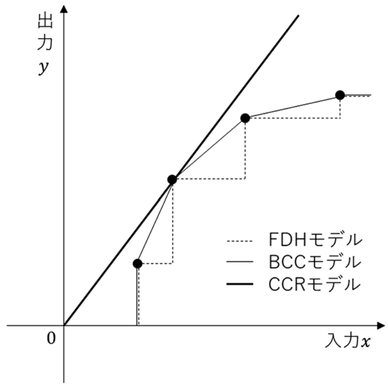

図1 生産可能集合（1入力1出力）

この集合は実在しているDMUとその凸包から構成され，提案者の名前からBCC (Banker-Charnes-Cooper) モデル[5]と呼ばれる．

さらに，活動 (x, y) が生産可能であれば，それを k 倍した活動 (kx, ky) も生産可能であると仮定する．このとき，式(3)において $(kx, ky) \in P$ となるには，$e'\lambda = k$ とならなければならず，これが任意の $k > 0$ に対して成立するので，$e'\lambda$ に関する制約条件がなくなる[6].

$$P = \{ (x, y) \,|\, x \geq X\lambda, y \leq Y\lambda, \lambda \geq 0 \} \tag{4}$$

この集合は実在しているDMUの活動を一定の比率で拡大縮小したDMUの凸包から構成され，提案者の名前からCCR (Charnes-Cooper-Rhodes) モデル[1]と呼ばれる．

以上の3種類の生産可能集合の境界線を1入力1出力の場合で例示すると図1となる．この境界線を**効率的フロンティア** (Efficient frontier) といい，右下に当たる領域が生産可能集合を表している．制約条件を順に緩和していることからも，三つの生産可能集合には次の包含関係があることもわかる．

$$\text{FDH} \subset \text{BCC} \subset \text{CCR}$$

2入力1出力の場合，単位出力当たりの入力をプロットして生産可能集合を示すと図2となる．2次元のグラフでは出力の大きさを表示できず，次節で説明する規模の収穫を表現できないので，FDHモデルとCCRモデルのみを示している．効率的フロンティアの右上に当たる領域が生産可能集合を表している．

3.2 規模の収穫

入力の規模が変わったときに出力がどうなるかを表すのが**規模の収穫** (Returns to scale) である．入力が

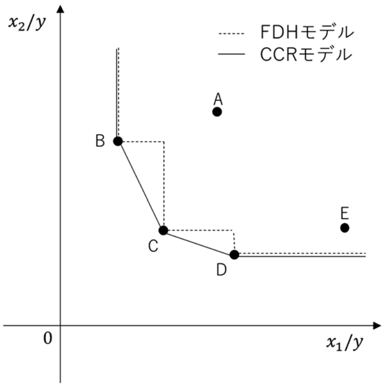

図 2　生産可能集合（2 入力 1 出力）

k 倍となったときに出力もちょうど k 倍となるときは，規模の収穫は一定という．出力は k 倍より大きくきるときは，規模の収穫は増加という．出力は k 倍より小さくなるときは，規模の収穫は減少という．

BCC モデルと CCR モデルの違いは入力が k 倍となったときに出力が k 倍になるという規模の収穫一定の仮定をしているかどうかである．

活動 (x, y) が生産可能のとき，活動 (kx, ky) も生産可能となるのは，式 (4) を導出したときのように $e'\lambda = k$ となる．このとき，規模の収穫は次のように分類できる．

一定型　(Constant return-to-scale; CRS)　規模の大きさは自由に変えることができるので，$e'\lambda$ に制約は付かない．

変動型　(Variable returm-to-scale; VRS)　規模に関する仮定はおかずに実在の DMU の線形結合で表すので，$e'\lambda = 1$ となる．

増加型　(Increase return-to-scale; IRS)　規模の縮小はできないが規模の拡大は自由にできると仮定しており，$k \geq 1$ より $e'\lambda \geq 1$ となる．

減少型　(Decrease retuen-to-scale; DRS)　規模の拡大はできないが規模の縮小は自由にできると仮定しており，$k \leq 1$ より $e'\lambda \leq 1$ となる．

一般型　(General return-to-scale; GRS)　ある範囲で拡大縮小ができると仮定して，$L \leq 1$ と $U \geq 1$ を用いて $L \leq e'\lambda \leq U$ となる．

規模の収穫をどのように仮定するかによって生産可能集合が決まる．BCC モデルの生産可能集合 (3) は規模の収穫変動型 (VRS)，CCR モデルの生産可能集合 (4) は規模の収穫一定型 (CRS) である．

4.　効率性の評価

4.1　効率性

DEA では，単に効率性というときは**技術効率性** (Technical efficiency) を指している．入出力項目の技術的な要素に基づいて測定されるものである．技術的な要素は金銭的なものに換算されて評価されることも多い．この場合の金額は技術的要素から算出されたり単価をかけたりして導き出される．単価を下げると入力は下がるので効率性はあがるが，活動自体が変わっているわけではない．活動の効率性を評価するために技術効率性を考えるのである．そしてコストや利益率はこれとは別の形で取り入れることで，技術的な要素の最適な配分を考える**配分効率性** (Allocative efficiency) という考え方がある．

また，活動の規模の大きさによって効率性が変わることもある．店舗拡張や新規採用などで規模を拡大して効率性を上げたり，店舗縮小や人員削減などで規模を縮小して効率性を上げたりすることが考えられている．拡大するのがよいのか縮小するのがよいのかは**規模の効率性** (Scale efficiency) を見ることで判断できる．

4.2　技術効率性

4.2.1　効率値と参照集合

最も基本的な DEA モデルは，入力指向型で規模の収穫を一定としたいわゆる CCR モデルである．投入に無駄がないかを評価するもので，活動の規模が変わっても投入から産出への変換効率は一定としている．これは，問題 $\langle \mathrm{I} \rangle$ において生産可能集合 P を式 (4) とすればよい．したがって，DMU_o に対して次の線形計画問題が得られる．

$$
\begin{array}{lll}
\langle \text{CCR-I} \rangle & \text{Minimize} & \theta \\
 & \text{subject to} & \theta x_o \geq X\lambda \\
 & & y_o \leq Y\lambda \\
 & & \lambda \geq 0
\end{array}
$$

問題 $\langle$CCR-I$\rangle$ の最適解を (θ^*, λ^*) とする．θ^* が効率値を表していて，$\theta^* = 1$ であるとき DMU_o は D 効率的であるという．単に効率的といわないのは，次節で述べるスラックの有無によるからである．

λ_j^* は DMU_o を評価するときの線形結合の割合を示しているもので，$\lambda_j^* > 0$ となる DMU j を**参照集合** (Reference set) という．

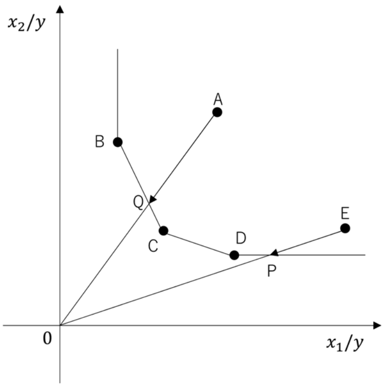

図 3　技術効率性

$$E_o = \left\{ j \,\middle|\, \lambda_j^* > 0, j = 1, 2, \ldots, n \right\}$$

図 3 において DMU A に対して問題 ⟨CCR-I⟩ を解くと，$\theta_A^* < 1, \lambda_B^* > 0, \lambda_C^* > 0, \lambda_D^* = 0, \lambda_E^* = 0$ となり，参照集合は $\{\mathrm{B}, \mathrm{C}\}$ である．DMU A の入力を θ_A^* 倍した活動 Q は，DMU B を λ_B^* 倍した活動と DMU C を λ_C^* 倍した活動の線形結合となっている．θ_A^* が技術効率性で，

$$\theta_A^* = \frac{OQ}{OA}$$

となる．θ_A^* を求めるためには生産可能集合のフロンティア上にある点 Q を特定する必要がある．

4.2.2　スラック

問題 ⟨CCR-I⟩ の制約条件によると，活動 $(\theta^* x_o, y_o)$ を活動 $(X\lambda, Y\lambda)$ と比べると，入力は大きいか等しく出力は小さいか等しくなっていることを示している．もし制約条件が等号で成立していれば両者は一致し，活動 $(\theta^* x_o, y_o)$ より効率的な活動は存在しない．したがって，DMU$_o$ は効率的であるといえる．

しかし，不等号で成立しているものがあれば，活動 $(\theta^* x_o, y_o)$ より効率的な活動 $(X\lambda, Y\lambda)$ が存在することになる．そこで，両辺の差を取って入力の余剰 s_x と出力の不足 s_y を定義する．

$$\begin{aligned} s_x &= \theta x_o - X\lambda \\ s_y &= Y\lambda - y_o \end{aligned}$$

これらを**スラック** (Slack) といい，スラックが 0 であれば，問題 ⟨CCR-I⟩ の制約条件が等号で成立していることがわかる．

スラックが 0 かどうかを調べるには，最大スラックを求める．そのために 2 段階の線形計画問題を解く．

$$\begin{array}{lll} \langle \mathrm{LP} \rangle & \text{Minimize-1} & \theta \\ & \text{Maximize-2} & e' s_x + e' s_y \\ & \text{subject to} & \theta x_o = X\lambda + s_x \\ & & y_o = Y\lambda - s_y \\ & & \lambda \geq 0, s_x \geq 0, s_y \geq 0 \end{array}$$

まず θ の最小化を行い，その最適値 θ^* に固定して第 2 目的関数を最大にする λ^*, s_x^*, s_y^* を求める．$\theta^* = 1$ かつ $s_x^* = 0, s_y^* = 0$ となるとき，DMU$_o$ は効率的という．

図 3 において DMU E に対して問題 ⟨CCR-I⟩ を解くと，$\theta_E^* < 1, \lambda_A^* = 0, \lambda_B^* = 0, \lambda_C^* = 0, \lambda_D^* = 1$ となり，参照集合は $\{\mathrm{D}\}$ である．DMU E の入力を θ_E^* 倍したのが活動 P である．DMU D と比較すると，入力 2 は同じであるが，入力 1 には余剰があるため，DMU D より非効率である．活動 P はこれ以上一定比率で入力を削減することはできないが，入力の余剰がある．これがスラックである．

4.2.3　改善目標

非効率的な DMU に対しては，生産可能集合の効率的フロンティア上の活動を示すことで効率的となるための改善目標を与えることができる．問題 ⟨LP⟩ の最適解を用いると

$$\begin{aligned} \theta^* x_o &= X\lambda^* + s_x^* \\ y_0 &= Y\lambda^* - s_y^* \end{aligned}$$

と表される．$(X\lambda^*, Y\lambda^*)$ は効率的フロンティア上にあるので，改善目標として

$$(\theta^* x_o - s_x^*, y_o + s_y^*)$$

を目指すと効率的になる．つまり，入力は θ^* 倍して余剰 s_x^* を除去し，出力は不足 s_y^* を増やすのが改善目標となる．

4.2.4　双対問題

問題 ⟨CCR-I⟩ の双対問題は次のようになる．

$$\begin{array}{lll} \langle \mathrm{DP} \rangle & \text{Maximize} & u' y_o \\ & \text{subject to} & v' x_o = 1 \\ & & -v' X + u' Y \leq 0 \\ & & v \geq 0, u \geq 0 \end{array}$$

双対変数である u, v は，それぞれ入力と出力に対応しており，評価ウェイトを表していると解釈できる．

多入力多出力の入出力にウェイトをかけて 1 入力 1 出力の仮想的な入出力を構成する．入力から出力へ

の変換効率を考えるときにこの仮想的入出力の比をとると，DMU_j に対して

$$\theta_j = \frac{u'y_j}{v'x_j}$$

となる．DEA では相対的な評価を行い，自分より優れた DMU がなければ効率的と判断する．そのために，すべての DMU の仮想的入出力比を 1 以下としたとき，評価対象の DMU の仮想的入出力比が最大となる評価ウェイトを求める．このように，評価ウェイトを一定の値に設定する固定ウェイトとするのではなく，それぞれの DMU ごとに決める可変ウェイトとしているのが DEA の特徴でもある．このとき次の分数計画問題で定式化される．

$$\begin{array}{lll} \langle \mathrm{FP} \rangle & \text{Maximize} & \theta = \dfrac{u'y_o}{v'x_o} \\ & \text{subject to} & \theta_j = \dfrac{u'y_j}{v'x_j} \leq 1, j = 1, 2, ..., n \\ & & v \geq 0, u \geq 0 \end{array}$$

$\theta^* = 1$ であれば，DMU_o は効率的である．$\theta^* < 1$ であれば，入出力比がより大きい DMU がほかに存在することになるので，DMU_o は非効率的となる．

線形の分数計画問題は線形計画問題に同値変換することができ，問題 $\langle \mathrm{FP} \rangle$ は問題 $\langle \mathrm{DP} \rangle$ に変換できる．最適ウェイトを u^*, v^* とすると，問題 $\langle \mathrm{DP} \rangle$ の制約条件から

$$v_1^* x_{1o} + v_2^* x_{2o} + \cdots + v_m^* x_{mo} = 1$$

となる．入力 i に対する $v_i^* x_{io}$ をみると，この入力がどの程度の割合で評価に用いられているかがわかる．出力に対しても $u_i^* y_{io}$ をみることによって，どの入出力項目に特徴があるかを知ることができる．

データを包絡する生産可能集合から求めている問題 $\langle \mathrm{CCR\text{-}I} \rangle$ を**包絡形** (Envelopment form)，入出力の評価ウェイトから求めている問題 $\langle \mathrm{DP} \rangle$ を**乗数形** (Multiplier form) という．これらは双対関係にある．

4.3 規模の効率性

現在の活動の規模をわずかに変化させたときでも効率的なままであれば，その規模は適正であろう．しかし，規模を拡大した方が効率性が高くなったり，規模を縮小した方が効率性が高くなったりすることもある．**規模の効率性** (Scale efficiency; SE) とは，効率的な規模の活動になっているかどうかをみるものであり，規模の収穫を一定とした CCR 効率値 θ^*_{CCR} と規模の収穫を自由にしている BCC 効率値 θ^*_{BCC} の比によって定義している．

$$SE = \frac{\theta^*_{CCR}}{\theta^*_{BCC}}$$

$SE = 1$ のときは適正な規模であることから，この DMU は**最も生産的な規模** (Most productive scale size; MPSS) であるという．$SE < 1$ のときは規模による非効率があるため，より適切な規模にする必要がある．そのような DMU の規模を拡大すべきか縮小すべきかは，規模の収穫を分類したモデルを用いた効率値によって判断することができる．

一定 $\theta^*_{CCR} = \theta^*_{BCC}$ のとき，最も生産的な規模である．

増加型 $\theta^*_{BCC} = \theta^*_{IRS} \neq \theta^*_{DRS}$ のとき，規模を拡大した方がよい．

減少型 $\theta^*_{BCC} = \theta^*_{DRS} \neq \theta^*_{IRS}$ のとき，規模を縮小した方がよい．

4.4 配分効率性

技術的には効率的な DMU でも，コストや金額などに換算して評価するときには必ずしも最適な活動とはいえないことがある．DMU_o において入力項目に対するコスト単価の情報 c_o が与えられているとき，現在の出力を得るために必要となる最小コストの入力を求める．

$$\begin{array}{lll} \langle \mathrm{C} \rangle & \text{Minimize} & {c_o}'x \\ & \text{subject to} & (x, y_o) \in P \end{array}$$

このとき，**コスト効率性** (Cost efficiency; CE) は

$$CE_o = \frac{{c_o}'x^*}{{c_o}'x_o}$$

で表される．$CE_o = 1$ のときは最小のコストで活動していることになるので，コスト効率的である．$CE_o < 1$ のときは現在の活動 x_o よりも安いコストの活動 x^* が存在する．x_o から x^* に入力要素の配分を変えることでコスト面でも効率的にすることができる．

同様のことが出力に関してもいえる．DMU_o において出力項目に対する利益単価の情報 p_o が与えられているとき，現在の入力から得られる最大利益の出力を求める．

$$\begin{array}{lll} \langle \mathrm{P} \rangle & \text{Maximize} & {p_o}'y \\ & \text{subject to} & (x_o, y) \in P \end{array}$$

このとき，**利益効率性** (Profit efficiency; PE) は

$$PE_o = \frac{{p_o}'y_o}{{p_o}'y^*}$$

で表される．$PE_o = 1$ のときは最大の利益を産出している活動なので，利益効率的である．$PE_o < 1$ のと

きは現在の活動 y_o よりも高い利益の活動 y^* が存在する．y_o から y^* に出力要素の配分を変えることで利益面でも効率的にすることができる．

これらはいずれも投入要素や産出要素 の配分がよくないために生じている非効率性と考えることができ，**配分効率性** (Allocative efficiency) と呼ぶ．

5. 出力指向モデル

入力指向モデルでは出力を保証したうえで入力をできるだけ小さくする活動を求めていた．これに対して出力指向モデルでは入力を保証したうえで出力をできるだけ大きくする活動を求める．効率性評価の考え方は入力指向モデルと同じである．出力指向の CCR モデルは，問題 ⟨O⟩ において式 (4) の生産可能集合を用いて

$$\begin{array}{lll}\langle\text{CCR-O}\rangle & \text{Maximize} & \phi \\ & \text{subject to} & x_o \geq X\mu \\ & & \phi y_o \leq Y\mu \\ & & \mu \geq 0\end{array}$$

となる．問題 ⟨CCR-O⟩ の最適解は $\phi^* \geq 1$ となり，$\phi^* = 1$ のとき DMU_o は D 効率的であり，$\phi^* > 1$ のとき D 非効率的となる．

1 入力 2 出力の出力指向モデルの生産可能集合と技術効率性の例を図 4 に示す．DMU A に対して問題 ⟨CCR-O⟩ を解くと，$\phi_A^* > 1, \mu_B^* > 0, \mu_C^* > 0, \mu_D^* = 0, \mu_E^* = 0$ となり，参照集合は $\{\text{B}, \text{C}\}$ である．DMU A の出力を ϕ_A^* 倍した活動 Q は，DMU B を λ_B^* 倍した活動と DMU C を λ_C^* 倍した活動の線形結合となっている．技術効率性 ϕ_A^* は，

$$\phi_A^* = \frac{OQ}{OA}$$

である．

規模の収穫を一定とした CCR モデルでは，入力指向モデルの最適解 (θ^*, λ^*) と出力指向モデルの最適解 (ϕ^*, μ^*) の間には次の関係が成り立つ．

$$\theta^* = \frac{1}{\phi^*}, \lambda^* = \frac{\mu*}{\phi^*} \tag{5}$$

規模の収穫が一定でない場合は式 (5) は成立しない．

改善目標は

$$(x_o - s_x^*, \phi^* y_o + s_y^*)$$

と表され，乗数形を表す双対問題は

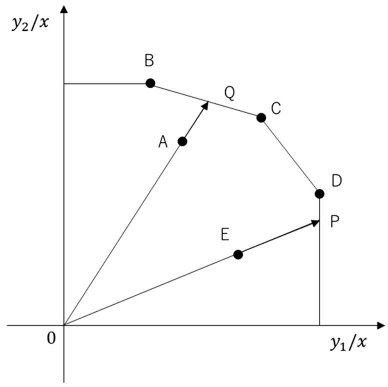

図 4 出力指向モデルの技術効率性

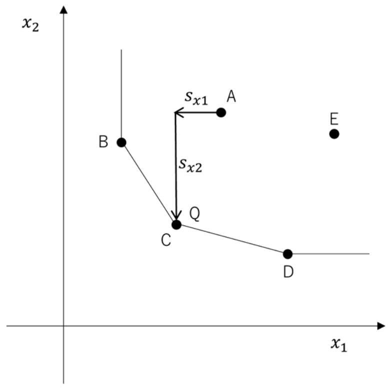

図 5 加法モデルの改善目標

$$\begin{array}{lll}\langle\text{DP-O}\rangle & \text{Minimize} & v'x_o \\ & \text{subject to} & u'y_o = 1 \\ & & -v'X + u'Y \leq 0 \\ & & v \geq 0, u \geq 0\end{array}$$

となる．

6. 非比率型モデル

ここまでの説明では，効率的かどうかを判断するときに用いている効率値は，入出力を一定の割合で変化させてどれだけ改善できるかを求めている比率尺度である．比率尺度でなくても，効率的フロンティア上にあるかどうかで効率的かどうかを判断できる．

6.1 加法モデル

スラックに注目した**加法モデル** (Additive model)[7] がある．効率値を求める第 2 段階では入力を一律に削減した後の最大スラックが 0 かどうかで効率的かを判断していた．加法モデルでは入力そのものにスラックがあるかどうかをみており，次の線形計画問題で判断

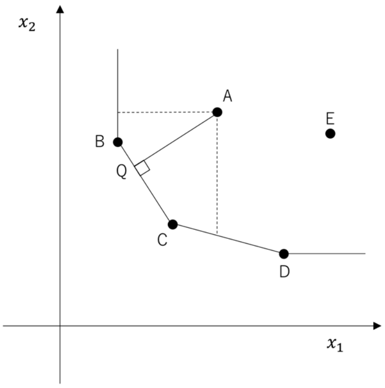

図 6 最短距離モデルの改善目標

する．

$$\langle\text{ADD}\rangle \quad \text{Maximize} \quad e's_x + e's_y$$
$$\text{subject to} \quad x_o = X\lambda + s_x$$
$$y_o = Y\lambda - s_y$$
$$\lambda \geq 0, s_x \geq 0, s_y \geq 0$$

最適解が $s_x^* = 0, s_y^* = 0$ であれば，効率的フロンティアとの距離が 0 であるため，DMU_o は効率的となる．効率値は得られない．改善目標は

$$(x_o - s_x^*, y_o + s_y^*)$$

となり，比率型モデルとは異なった点が示される．図 5 に改善目標 Q を例示している．

各入出力の価値判断にあらかじめ決められたウェイト w_x, w_y を想定することができるのであれば，目的関数を $w_x' s_x + w_y' s_y$ と変更すればよい．

6.2 スラック基準型モデル

スラックに基づいた効率性を 0 から 1 の数値で評価するために定義したのが**スラック基準型尺度** (Slack-based measure; SBM)[8] である．

$$\langle\text{SBM}\rangle \quad \text{Minimize} \quad \rho = \frac{1 - \dfrac{1}{m}\displaystyle\sum_{i=1}^{m} \frac{s_{xi}}{x_{io}}}{1 + \dfrac{1}{r}\displaystyle\sum_{l=1}^{r} \frac{s_{yl}}{y_{lo}}}$$
$$\text{subject to} \quad x_o = X\lambda + s_x$$
$$y_o = Y\lambda - s_y$$
$$\lambda \geq 0, s_x \geq 0, s_y \geq 0$$

各入出力値に対してスラックの割合を求め，それらの平均から ρ を算出している．$0 \leq \rho^* \leq 1$ が成り立ち，$\rho^* = 1$ のとき効率的となる．また，$\rho^* \leq \theta_{CCR}^*$ であり，$\rho^* = 1$ のときは $\theta_{CCR}^* = 1$ であることも示されている．

6.3 最短距離モデル

スラックは効率的フロンティアとの距離を示しているともいえるが，加法モデルでは最大スラックを求めている．最も大きいスラックが 0 であれば効率的と判断できるのであるが，そのときに得られた改善目標は最も離れた活動を示すことになる．そこで効率的フロンティアへの距離を最小にする活動を改善目標とするのが最短距離 DEA である．図 6 に改善目標 Q を例示しているが，現在の活動に最も近いことから受入やすいものといえるだろう．

しかし，スラックや距離の大きさは入出力の単位に依存することと，一般に効率性に単調性が保証されないことがわかっている [9].

7. おわりに

本稿では DEA による効率性分析の方法を生産可能集合に基づいて解説した．規模の収穫をどのように仮定するかによって生産可能集合の構成が変わってくるので，分析対象に応じて検討されるとよい．効率性を測る尺度は比率尺度が一般的ではあるが，非比率尺度もいくつか紹介した．効率性尺度に応じて改善目標も定まるのであるが，いずれも効率的フロンティアにどのように射影するかを与えるものである．

生産可能集合と効率性尺度の組合せによってさまざまなモデルができるので，さらなる拡張も考えながら適切なモデルで解析されるとよい．

参考文献

[1] A. Charnes, W. W. Cooper and E. Rhodes, "Measureing the efficiency of decision making units," *European Journal of Operational Research*, **2**, pp. 429–444, 1978.

[2] 刀根薫，『経営効率性の測定と改善—包絡分析法 DEA による—』，日科技連出版社，1993.

[3] 刀根薫（編），『経営効率性の測定の基礎—DEA 分析の事例で学ぶ生産性・効率性向上への挑戦—』，日本評論社，2022.

[4] D. Deprins, L. Simar and H. Tulkens, "Measuring labour-efficiency in post offices," *The Performance of Public Enterprises*, M. Marchand, P. Pestieau and H. Tulkens (eds.), Elsevier Science Ltd, pp. 243–267, 1984.

[5] R. D. Banker, A. Charnes and W. W. Cooper, "Some models for estimating technical and scale efficiencies in data envelopment analysis," *Management Science*, **30**, pp. 1078–1092, 1984.

[6] W. D. Cook and J. Zhu, *Data Envelopment Analysis Balanced Benchmarking*, 2013.（森田浩訳，『データ包絡分析法—バランスの取れたベンチマーキング—』，静岡学術出版，2014.）

[7] A. Charnes, W. W. Cooper, B. Golany, L. Seiford and J. Stutz, "Foundations of data envelopment analysis for Pareto-Koopmans efficient empirical production func tions," *Journal of Econometrics*, **30**, pp. 91–107, 1985.
[8] K. Tone, "A slack-based measure of efficiency in data envelopment analysis," *European Journal of Operational Research*, **130**, pp. 498–509, 2001.
[9] K. Ando, A. Kai, Y. Maeda and K. Sekitani, "Least distance based inefficiency measures on the Pareto efficient frontier in DEA," *Journal of Operations Research Society of Japan*, **55**, pp. 73–91, 2012.