

# 離散幾何・計算幾何に現れる組合せ遷移

岡本 吉央

離散幾何・計算幾何に現れる典型的な組合せ遷移問題を二つ紹介し、既存研究の結果と未解決問題をいくつか述べる。一つ目は2次元有限点集合の三角形分割における辺フリップであり、解空間グラフとしてフリップ・グラフを考察対象とする。二つ目は高次元凸多面体の1-骨格で、これ自身が解空間グラフとなる。どちらの場合も、解空間グラフは連結である。議論の対象となるのは解空間グラフの直径と最短路である。

キーワード：三角形分割，凸多面体，直径，最短路

## 1. 三角形分割における辺フリップ

### 1.1 連結性

平面上の有限点集合  $P$  に対して、 $P$  の三角形分割 (triangulation) とは、 $P$  の凸包を三角形に分割したもので、次を満たすもののことである。

1. どの三角形の頂点も  $P$  に属する。
2. 異なる二つの三角形の共通部分は、それらの辺であるか、頂点であるか、空集合である。

以後、本節では、 $P$  においてどの3点も同一直線上にないと仮定する。

有限点集合  $P$  の三角形分割  $T$  において、二つの三角形  $t_1, t_2$  が辺を共有し、 $t_1 \cup t_2$  が凸四角形を成すとき、 $t_1 \cap t_2$  はその凸四角形の対角線になっている。辺フリップ (edge flip) とは、その対角線を消して、もう一方の対角線を挿入する操作のことである。

有限点集合  $P$  の三角形分割の族は辺フリップの操作によって往来できる (図1)。組合せ遷移の用語を使えば、解空間グラフとして、三角形分割を頂点、辺フリップを辺とするものを考えると、その解空間グラフが連結であるということになる [1]。以後、この解空間グラフをフリップ・グラフと呼ぶことにする。

フリップ・グラフが連結であることの証明はたとえば次のように行うことができる。概要を一文で述べれば、「標準三角形分割を一つ定めて、任意の三角形分割をそれに変形する」ということになる。標準三角形分割として、次のような三角形分割  $T^*$  を考える。まず、有限点集合  $P$  の要素をその  $x$  座標が小さい順に  $p_1, p_2, \dots, p_n$  とする<sup>1</sup>。そして、 $p_1, p_2, \dots, p_{i-1}$  までの三角形分割が構成されたときに、 $p_i$  を追加する。追

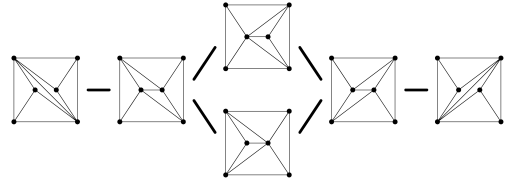


図1 三角形分割の辺フリップ

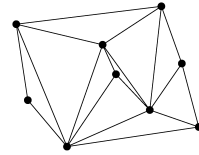


図2 標準三角形分割の例

加するとき、 $p_i$  と  $p_i$  から見える頂点を結ぶことで新たに辺と三角形を構成する。これによって、 $p_1, p_2, \dots, p_i$  までの三角形分割が構成できる。これを  $i = n$  になるまで続ける。例を図2に挙げる。

任意の三角形分割  $T$  を上で構成した標準三角形分割  $T^*$  に変形するためには、次のように辺フリップを行っていけばよい。まず、点  $p_n$  を見て、それに接続する辺の集合が  $T^*$  のそれと同じならば、 $p_n$  に対する処理を終了する。そうでなければ、 $T^*$  にあり、 $T$  にはない辺で  $p_n$  に接続するものが存在することになる。実は、そのような辺の中に、1回の辺フリップにより得られるものがあることを証明できる。つまり、その辺をフリップして得れば、 $T$  を  $T^*$  に近づけられる。辺フリップ後の三角形分割を新たに  $T$  として上のプロセスを続ける。点  $p_n$  に対する処理が終了したら、点  $p_{n-1}$  に対して同じ処理を行っていくが、そのときここまで処理を終えた点に接続する辺は変更しないものとす

<sup>1</sup> どの2点の  $x$  座標も異なるものとする。そうでないときは、平面を少し回転させれば、そうなる。

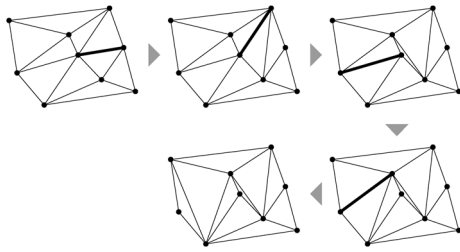


図3 標準三角形分割への辺フリップ列

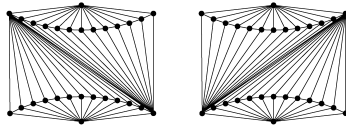


図4 直径が  $\Omega(n^2)$  となる例

る。これで、 $p_n, p_{n-1}, \dots$  と順に処理をしていき、最終的にすべての点に対する処理が終わると標準三角形分割  $T^*$  が得られる。図3を参照のこと。

三角形分割  $T_1$  を別の三角形分割  $T_2$  に変形するときには、まず、 $T_1$  を標準三角形分割  $T^*$  に変形する辺フリップ列  $f_1$  と  $T_2$  を  $T^*$  に変形する辺フリップ列  $f_2$  を考える。このとき、 $f_1$  に従って辺フリップを行った後で、 $f_2$  の逆順に辺フリップを行うことで、 $T_1$  を  $T_2$  に変形できる。これでフリップ・グラフが連結であることがわかった。

フリップ・グラフが連結であることから、次の二つが重要な研究テーマとなる。

**直径:** フリップ・グラフにおける任意の2頂点間の距離の最大値はなにか？

**最短路:** フリップ・グラフにおける任意の2頂点間の距離はなにか？

ここで距離と呼んでいるものはグラフ上の距離であり、つまり、最短路長のことである。

### 1.2 直径

先に紹介した連結性の証明から、直径は  $O(n^2)$  であることがわかる。ただし、 $n$  は  $P$  の要素数 (点の総数) である。Hurtado et al. [2] は図4に示すような三角形分割に対して、その間の距離が  $\Omega(n^2)$  になることを示した。つまり、最悪の場合は漸近的に直径が  $\Theta(n^2)$  になる。

点集合  $P$  が凸の位置 (convex position) にあるとき、すなわち、 $P$  がある凸多角形の頂点集合であるとき、直径は  $\Theta(n)$  になる。歴史に沿うと以下のとおりとなる。1982年の論文で、Culik and Wood [3] は直径が  $2n - 6$  以下であることを証明した。1988年の論文

で、Sleator et al. [4] は  $n \geq 13$  のとき直径が  $2n - 10$  以下であり、無限に多い  $n$  に対して直径が  $2n - 10$  以上であることを証明した。そして、2014年の論文で、Pournin [5] は  $n \geq 13$  のとき直径が  $2n - 10$  以上であることを証明した。Sleator et al. は双曲幾何における体積の概念を用いて下界を証明したが、Pourninの証明は組合せ的であることを補足する。

凸の位置にある場合の上界は、一般の場合と同じように標準三角形分割へ変形することで得られる。標準三角形分割の選び方を工夫しないと  $2n - 6$  という上界が得られるが、以下のように工夫することで  $2n - 10$  という上界が導出できる。まず、標準三角形分割として、すべての対角線が一つの頂点  $p$  に接続しているような三角形分割  $T(p)$  を考えることにする。対角線の総数は  $n - 3$  である。三角形分割  $T_1$  において点  $p$  に接続する対角線の数を  $d_1(p)$  とすると、 $T(p)$  を得るには  $n - 3 - d_1(p)$  回の辺フリップで十分であることがわかる (つまり、1回の辺フリップで必ず  $p$  の接続辺の数を増加させられる)。いま、二つの三角形分割  $T_1, T_2$  において、点  $p$  に接続する対角線の数をそれぞれ  $d_1(p), d_2(p)$  とすると、 $T_1$  を  $T(p)$  に変形して、そこから  $T_2$  に変形するために行う辺フリップの総回数は  $2n - 6 - d_1(p) - d_2(p)$  となる。これは  $2n - 6$  以下であるので、任意の  $p$  に対して、 $T(p)$  を経由する辺フリップの総回数が  $2n - 6$  以下であることがわかる。

ここで、各対角線は二つの頂点に接続しているので、

$$\sum_{p \in P} d_1(p) = \sum_{p \in P} d_2(p) = 2(n - 3)$$

である。したがって、

$$\begin{aligned} \sum_{p \in P} (2n - 6 - d_1(p) - d_2(p)) &= (2n - 6)n - 4(n - 3) \\ &= 2n^2 - 10n + 12 \end{aligned}$$

となる。これを  $n$  で割ると、 $2n - 10 + \frac{12}{n}$  となるので、つまり、 $n \geq 13$  のとき、ある  $p \in P$  に対して、 $2n - 6 - d_1(p) - d_2(p)$  は  $2n - 10$  以下となる。そのような  $p$  を選び (たとえば、 $d_1(p) + d_2(p)$  が最大の  $p$  を選び)、 $T(p)$  を経由する変形を行えば辺フリップの総回数が  $2n - 10$  以下となるわけである。

### 1.3 最短路

最短路計算についてなにか知られているだろうか？そもそも、三角形分割の総数が多項式個しかなければ、フリップ・グラフを陽に構成して、多項式時間最短路

計算アルゴリズム（この場合は、辺重みが同一なので、幅優先探索で十分である）を用いて最短路が多項式時間で計算できることになる。しかし、残念ながら、一般に、三角形分割の数は指数関数的になりうる。むしろ、指数関数的にしかならないほうが驚きである。それを最初に証明したのは Ajtai et al. [6] で、彼らは  $n$  個の点からなる集合の三角形分割の総数がある定数  $c$  に対して  $c^n$  個以下となることを証明した。彼らが与えた  $c$  に対する上界は  $c \approx 10^{13}$  であった。その後、この  $c$  は徐々に改善され、現在最良の上界は Sharir and Sheffer [7] による  $c = 30$  である。

三角形分割の総数の下界も研究されている。凸の位置にある点集合に対して、三角形分割の総数がカタラン数で与えられることはよく知られた事実であり、それはおよそ  $4^n$  である。一方、それよりもたくさん三角形分割をもつ点集合の構成も知られている。現在最良の下界は Rutschmann and Wettstein [8] による約  $9.08^n$  である。

三角形分割の総数が大きいからといって、最短路問題が難しい問題であるとは限らない。しかしながら、点集合  $P$  になにも制限がないときには、最短路（距離）を計算する問題は NP 困難であることが知られている。これは Lubiw and Pathak [9] と Pilz [10] によって同時期に証明された（Pilz の証明からは近似困難性まで得られる）。彼らの証明はどちらもグラフの頂点被覆問題を帰着することで行われ<sup>2</sup>、その中で図 4 の三角形分割の構成を巧みに用いている。アルゴリズムを与える向きの研究として、距離をパラメータとする固定パラメータ・アルゴリズムに関するものがある [11, 12]。多項式時間で距離の定数近似を与えるアルゴリズムの設計は未解決である。

この分野における大きな未解決問題は、凸の位置にある点集合に対して、三角形分割間の最短路を多項式時間で計算できるかどうか、というものである。この未解決問題そのものについてほぼ進展がない。距離の 2 倍以内の値を出力するアルゴリズムは割と自然に設計できて、その線形時間バージョンを Cleary and St. John [13] は与えている。距離をパラメータとする固定パラメータ・アルゴリズムも知られていて、最良のものは Li and Xia [14] による。

#### 1.4 高次元の場合

3 次元以上の点集合に対しても三角形分割を定義することができる。本来は、単体分割と呼ぶべきかもしれ

<sup>2</sup> Lubiw and Pathak [9] のほうは 3 正則平面的グラフに制限したバージョンを用いている。

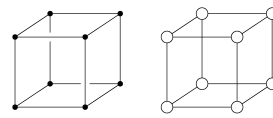


図 5 立方体とその 1-骨格

れない。また、3 次元以上の三角形分割に対するフリップも定義できるが、その定義のためには準備が必要になるのでここでは省略する。詳細はたとえば De Loera et al. による書籍 [15] を参照のこと。

高次元において、フリップによって作られるフリップ・グラフが連結であるとは限らない。実際、Santos [16] は 5 次元の場合にフリップ・グラフが非連結となる例を構成した。6 次元においては、フリップを全く行えない三角形分割も存在する [17]。高次元の空間は「目に見えない」ため、状況をうまく組合せ的に捉えることが重要となる。そのための道具として有向マトロイド (oriented matroid) があり、三角形分割に限らず、高次元空間における点集合の振る舞いを解析する際に役立つ。

3 次元と 4 次元において、フリップ・グラフが常に連結であるかどうか、は未解決である。上で述べたとおり、2 次元では常に連結であり、5 次元（以上）では非連結となる例が存在するわけである。三角形分割における詳しい情報は De Loera et al. による書籍 [15] に載っている。

## 2. 凸多面体の 1-骨格

たとえば、3 次元の立方体には頂点が 8 個あり、辺が 12 個ある（図 5）。これらのもつ接続関係から自然に無向グラフが得られる。つまり、凸多面体の頂点集合がグラフの頂点集合であり、凸多面体の辺集合がグラフの辺集合となるような無向グラフである。このような無向グラフを凸多面体の **1-骨格** (1-skeleton) と呼ぶ。

凸多面体の 1-骨格は最適化においても重要な役割を果たしている。いわゆる「線形計画問題に対する単体法」は凸多面体の 1-骨格上で最適な頂点を探索するアルゴリズムであると解釈することができる。そのような関係から、1-骨格の性質はよく研究される対象となっている。

凸多面体の 1-骨格は組合せ遷移においても重要な役割を果たしている。前の節で登場した、凸の位置にある点集合の三角形分割のフリップ・グラフは**結合多面体** (associahedron) の 1-骨格と同じである。また、ほかにもさまざまな組合せの対象に関わる解空間グラフ

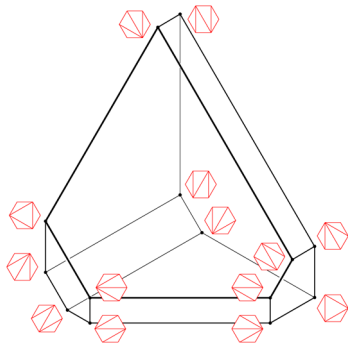


図 6 3次元結合多面体  
凸六角形の三角形分割のフリップ・グラフが1-骨格として現れる。

がある凸多面体の1-骨格として表される。3次元結合多面体の実現の一つを図6に示す。

組合せ遷移の観点から見ると、凸多面体の1-骨格の連結性がまず気になるが、これは構成法から必ず連結であることがわかる<sup>3</sup>。さらに、Balinski [18]によると、 $d$ 次元凸多面体の1-骨格は必ず $d$ 連結である。つまり、任意の2頂点間に互いに交わらない経路を $d$ 個取ることができる。ここで、凸多面体の次元とはそれを実現する空間の次元の最小値であることに注意されたい。たとえば、図5、図6のグラフは3連結である。

凸多面体の1-骨格についても、直径と最短路を考える。ここで、凸多面体の復習を簡単に行う。凸多面体 (convex polytope) は、「有限点集合の凸包」であり、それは「有限個の閉半空間の共通部分で有界なもの」ということもできる。「有限点集合の凸包」として凸多面体  $P$  を定義するとき、そのような点集合の中で要素数最小のものが一意に定まる。それが  $P$  の頂点集合である。また、「有限個の閉半空間の共通部分で有界なもの」として  $P$  を定義するとき、そのような閉半空間の集合で要素数最小のものが定まる。そのとき、各閉半空間を  $\mathbf{a}^T \mathbf{x} \leq b$  と表したとき、 $\mathbf{a}^T \mathbf{x} = b$  と  $\mathbf{x} \in P$  を同時に満たす点  $\mathbf{x}$  の集合のことを  $P$  のファセット (facet) と呼ぶ。言いかえると、ファセットの集合によって凸多面体  $P$  を定義することもできる。頂点集合によって凸多面体  $P$  を表すことを  $P$  の **V** 表現と呼び (V は vertex より)、ファセットを定める閉半空間の集合によって  $P$  を表すことを  $P$  の **H** 表現と呼ぶ (H は halfspace より)。図7を参照のこと。

凸多面体をアルゴリズムで扱う方法は複数ある。一つは上で挙げたようなV表現またはH表現を入力と

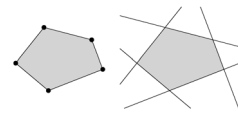


図 7 凸多面体のV表現(左)とH表現(右)

して与えることである。この入力法は計算の観点から違いがある。実際、頂点数が  $n$  である  $d$  次元多面体のファセット数は  $\Omega(n^{\lfloor d/2 \rfloor})$  まで大きくなりうる。ファセット数が高々  $O(n^{\lfloor d/2 \rfloor})$  であるという事実は、凸多面体に対する上限定理 (upper bound theorem) として知られており、凸多面体の組合せ論における基本的な定理の一つである。双対性の議論によって、ファセット数が  $n$  である  $d$  次元多面体の頂点数が  $\Omega(n^{\lfloor d/2 \rfloor})$  まで大きくなることもあることがわかる。詳細はZieglerの教科書 [19] に載っている。つまり、頂点数に関してファセット数は指数関数的に大きくなることもあり、ファセット数に関して頂点数が指数関数的に大きくなることもある。一方で、凸多面体の1-骨格を本節が対象とすることに注意すると、V表現はあまり興味深い入力法でないことがわかる。なぜかという、それによって、1-骨格を具体的に多項式時間で構成できてしまい、1-骨格の直径や最短路はその上の探索問題として簡単に解けてしまうからである。この観点では、H表現において1-骨格に関わる問題を扱うことが非自明となる。

もう一つの扱いは1-骨格をオラクルとして扱うことである。ここでは、凸多面体  $P$  の2頂点を入力したとき、それらが  $P$  の辺を成すかどうか (つまり、その2頂点が  $P$  において隣接しているかどうか)、Yes/Noで答えてくれるような手続き (オラクル) の存在を仮定する。それを通してアルゴリズムを設計することを考えるのである。このとき、オラクルへの問合せ回数も計算量の解析に含めることになる。この扱い方の妥当性については、「最短経路」の節で議論する。

## 2.1 直径

凸多面体の1-骨格に関して、直径は最も重要な問題であると認識されている。これは、線形計画問題に対する単体法においては「最適アルゴリズムの最悪時解析」に対応している。

Hirschによる古い予想は「 $d$ 次元凸多面体の1-骨格の直径は、ファセット数が  $n$  のとき、 $n-d$  以下である」というものである。この予想は1957年にHirschからDantzigに送られた手紙に書かれていたと伝わっている。

Hirsch予想は正しくないことが今となってはわかっ

<sup>3</sup> 非凸多面体の1-骨格は連結であるとは限らない。その意味で、連結性はそんなに自明なことではないのかもしれない。

ている。Santos [20] は具体的な反例を挙げている。彼の反例では、 $d = 43, n = 86$  で直径は 44 である。その後、Matschke et al. [21] は  $d = 20, n = 40$  で直径が 21 となるような凸多面体を構成している。

これらの反例は Hirsch 予想にある  $n - d$  を 1 だけ破っている。もっと大幅に破る反例があるかどうか、未解決である。Kalai は「 $d$  次元凸多面体の 1-骨格の直径は、ファセット数が  $n$  のとき、 $n$  と  $d$  の多項式で上から抑えられるか」という多項式 Hirsch 予想 (polynomial Hirsch conjecture) を提案している。もちろん、これも未解決である。

直径に対して、現在知られている中で最もよい上界の一つは Sukegawa [22] による

$$(n - d)^{\log_2 O(d/\log d)}$$

である。これは Kalai and Kleitman [23] による上界  $n^{2+\log_2 d}$  の考え方を精緻化することで得られている。

直径を計算する問題の複雑性も研究されている。ここで、凸多面体は H 表現で与えられるものとする。Frieze and Teng [24] は、与えられた凸多面体の直径を計算する問題が弱 NP 困難であることを証明した<sup>4</sup>。さらに、Sanità [25] はこの問題が強 NP 困難であることを証明した。実際、Sanità が証明したことは分数マッチング多面体 (fractional matching polytope) の直径計算が強 NP 困難であることである。分数マッチング多面体とは、無向グラフ  $G = (V, E)$  に対して定義される凸多面体であり、次のような不等式系で表される。

$$\sum_{e \in \delta(v)} x_e \leq 1 \quad \forall v \in V, \\ x_e \geq 0 \quad \forall e \in E.$$

ここで、変数は  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^E$  であり、 $\delta(v)$  は  $v$  に接続する辺全体の集合を表す。これは、無向グラフにおける最大マッチング問題を整数計画問題として定式化したとき、その線形計画緩和として現れる問題の許容領域を表す凸多面体として自然に現れるものである。

## 2.2 最短路

凸多面体の 1-骨格における最短路問題は直径ほど研究されていないようである。先にも述べたとおり、凸の位置にある点集合の三角形分割が作るフリップ・グラフは結合多面体の 1-骨格であるので、辺フリップによる最短路を計算する未解決問題はそのまま結合多面

の 1-骨格に関する未解決問題として言い換えることができる。すなわち、結合多面体の 1-骨格において 2 頂点間の最短路を計算する問題の複雑性証明が未解決である。

ただし、このとき、凸多面体の 1-骨格はオラクルとして与えられるものとしている。つまり、結合多面体の二つの頂点が与えられたとき、それらが隣接しているかどうか判定してくれるオラクルを仮定するのである。実際、頂点は三角形分割に対応し、頂点の隣接性判定は三角形分割が辺フリップで移り合える関係にあるか判定することと同値であるので、そのようなオラクルは多項式時間で動くように設計できる。また、凸多面体自体が H 表現で与えられているとしても (多項式時間可解性には) 影響を与えない。なぜならば、結合多面体の各ファセットは凸多角形の対角線一つに対応し、ファセットの交わりとして表される頂点は、ファセットに対応する対角線から作られる三角形分割に対応するからである。このことから、結合多面体のファセット数が凸多角形の頂点数の多項式で抑えられることもわかる。

以後、頂点の座標が 0 か 1 に限定される凸多面体のみを考えることにする。そのような凸多面体は組合せ最適化で頻繁に現れる。なお、そのような凸多面体に対して Hirsch 予想が成り立つことが Naddef [26] によって証明されている。

連結無向グラフ  $G = (V, E)$  の全域木多面体 (spanning tree polytope) とは、各頂点が  $G$  の全域木に対応するような凸多面体で、次のように構成される。グラフ  $G$  の全域木とは、 $G$  の連結部分グラフで  $V$  を頂点集合とし、閉路を含まないもののことである。全域木  $T = (V, E(T))$  に対して、点  $\mathbf{x}(T) \in \{0, 1\}^E$  を次のように定義する。

$$\mathbf{x}(T)_e = \begin{cases} 0 & (e \notin E(T)), \\ 1 & (e \in E(T)). \end{cases}$$

そして、 $G$  の全域木多面体はすべての全域木  $T$  に対する点  $\mathbf{x}(T)$  の凸包である。この多面体の頂点座標はどれも 0 か 1 なので、 $\mathbf{x}(T)$  という形の点はどれも全域木多面体の頂点であり、ほかに頂点はない。図 8 は全域木多面体の 1-骨格の例である。

二つの頂点  $\mathbf{x}(T), \mathbf{x}(T')$  の隣接性は次のように特徴づけられる。すなわち、 $T = (V, E(T)), T' = (V, E(T'))$  であるとき、 $\mathbf{x}(T)$  と  $\mathbf{x}(T')$  が全域木多面体の隣接頂点であるための必要十分条件は、 $E(T)$  と  $E(T')$  の対

<sup>4</sup> より細かく、 $D^P$  困難であることまで証明している。クラス  $D^P$  については論文 [24] を参照のこと。

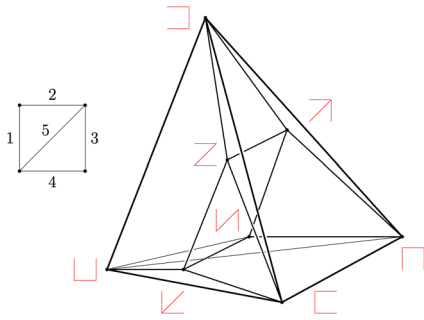


図8 全域木多面体の例  
左のグラフの全域木多面体の1-骨格が右に描かれ、各頂点に対応する全域木も示してある。

称差の要素数が2であることである。これによって、全域木多面体においては、2頂点の隣接性を判定するオラクルが多項式時間で動くように設計できることがわかる。

隣接性オラクルを仮定するモデルにおいて、全域木多面体における最短経路問題は多項式時間で解ける。これは古くから知られている事実である。この事実はマトロイドの基多面体に対しても拡張できることを補足する。

隣接性を判定するオラクルが多項式時間で動くように設計できないと思われる問題も知られている。典型例は巡回セールスマン多面体 (traveling salesman polytope) である。これは、連結無向グラフ  $G = (V, E)$  に対して、すべての頂点を通る閉路 (ハミルトン閉路) の辺集合  $C$  から、全域木多面体のときと同様に凸多面体を構成することで定義される。構成法から、ハミルトン閉路多面体 (Hamilton cycle polytope, Hamilton circuit polytope) とも呼ばれる。

二つのハミルトン閉路の辺集合  $C, C'$  があるとき、それらに対応する頂点  $\mathbf{x}(C), \mathbf{x}(C')$  が巡回セールスマン多面体において隣接しているか判定する問題は coNP 完全である [27]。つまり、2頂点間の距離が1かどうか判定することが難しい凸多面体である、ということになる。

隣接性判定が難しい凸多面体はほかにも知られていて、たとえば、ナップサック多面体 [28] や集合被覆多面体 [29] がそのような例となっている。これらはどれも NP 困難な組合せ最適化問題に付随する凸多面体である。

では、隣接性判定は多項式時間でできる (つまり、多項式時間で動く隣接性オラクルは存在する) が、最短経路問題が難しい (NP 困難である) ような例はあるのだろうか? 答えは Yes である。Aichholzer et al. [30]

と Ito et al. [31] は独立に無向グラフの完全マッチング多面体 (perfect matching polytope) の1-骨格における最短経路問題が NP 困難であることを証明した。無向グラフ  $G = (V, E)$  の完全マッチングとは、辺部分集合  $M \subseteq E$  で、任意の頂点  $v$  に接続する  $M$  の辺がちょうど一つであるようなものである。各完全マッチング  $M$  から、全域木多面体のときと同様に点  $\mathbf{x}(M)$  を構成し、それらの凸包として定義されるのが完全マッチング多面体である。二つの完全マッチング  $M, M'$  に対して、2頂点  $\mathbf{x}(M), \mathbf{x}(M')$  が完全マッチング多面体において隣接しているための必要十分条件は  $M$  と  $M'$  の対称差が単一の閉路になることである [32]。この条件から、完全マッチング多面体における隣接性オラクルとして多項式時間で動くものが設計できることがわかる。一方で、Aichholzer et al. [30] と Ito et al. [31] は独立に、2頂点  $\mathbf{x}(M), \mathbf{x}(M')$  の距離が2であるか判定することが NP 完全であることを示している。最近、Cardinal and Steiner [33] は最短経路の長さを  $c \log n / \log \log n$  倍で近似することも NP 困難であることを証明している ( $c$  はある定数、 $n$  はグラフ  $G$  の頂点数)。

完全マッチング多面体の1-骨格における最短経路問題の NP 困難性は、H 表現を入力としたときにも成立する。なぜなら、Aichholzer et al. と Ito et al. の証明では、NP 困難性が  $G$  を二部グラフとしたときにも成り立つからである。二部グラフ  $G = (V, E)$  に対して、完全マッチング多面体は次の等式・不等式を用いて定義できる<sup>5</sup>。

$$\sum_{e \in \delta(v)} x_e = 1 \quad \forall v \in V,$$

$$x_e \geq 0 \quad \forall e \in E.$$

ここで、 $\delta(v)$  は  $v$  に接続する辺全体の集合を表すのであった。この等式・不等式は  $G$  の頂点数の多項式個しかないので、多項式時間帰着には影響を与えないわけである。

Ito et al. [31] は  $G$  が外平面的グラフであるとき、すなわち、すべての頂点が外面に現れるような非交差描画をもつグラフであるとき、完全マッチング多面体の1-骨格における最短経路問題を多項式時間で解くアルゴリズムを与えている。アルゴリズムでは、2連結外平面的グラフの双対グラフが木となることを利用する。与えられる完全マッチング  $M, M'$  が共通の辺をもた

<sup>5</sup>  $G$  が二部グラフではないときには、これら以外にいわゆる「奇閉路不等式」と呼ばれる不等式も必要となる。

ないときは、双対グラフ（を少し変形した）木の直径から最短路が得られる。完全マッチング  $M, M'$  が共通の辺をもつときは、共通の辺の部分で双対木を分割して、各部分の直径を小さくすることを考えるが、分割自身にもコストがかかるものとする。そのような最適化問題を多項式時間で解くことで、 $M, M'$  が共通の辺をもたない場合に帰着する。詳細は論文 [31] を参照のこと。

**謝辞** 本特集をご提案いただいた梅谷俊治先生、組合せ遷移の研究へ誘っていただいた伊藤健洋先生、学術変革領域研究 (B)「組合せ遷移の展開に向けた計算機科学・工学・数学によるアプローチの融合」で楽しく一緒に研究していただいた皆様にここで感謝する。

### 参考文献

- [1] C. L. Lawson, “Transforming triangulations,” *Discrete Mathematics*, **3**, pp. 365–372, 1972.
- [2] F. Hurtado, M. Noy and J. Urrutia, “Flipping edges in triangulations,” *Discrete and Computational Geometry*, **22**, pp. 333–346, 1999.
- [3] K. Culik II and D. Wood, “A note on some tree similarity measures,” *Information Processing Letters*, **15**, pp. 39–42, 1982.
- [4] D. D. Sleator, R. E. Tarjan and W. P. Thurston, “Rotation distance, triangulations, and hyperbolic geometry,” *Journal of the American Mathematical Society*, **1**, pp. 647–681, 1988.
- [5] L. Pournin, “The diameter of associahedra,” *Advances in Mathematics*, **259**, pp. 13–42, 2014.
- [6] M. Ajtai, V. Chvátal, M. M. Newborn and E. Szemerédi, “Crossing-free subgraphs,” *Annals of Discrete Mathematics*, **12**, pp. 9–12, 1982.
- [7] M. Sharir and A. Sheffer, “Counting triangulations of planar point sets,” *The Electronic Journal of Combinatorics*, **18**, Article No. P70, 2011.
- [8] D. Rutschmann and M. Wettstein, “Chains, Koch chains, and point sets with many triangulations,” *Journal of the ACM*, **70**, Article No. 18, 2023.
- [9] A. Lubiw and V. Pathak, “Flip distance between two triangulations of a point set is NP-complete,” *Computational Geometry: Theory and Applications*, **49**, pp. 17–23, 2015.
- [10] A. Pilz, “Flip distance between triangulations of a planar point set is APX-hard,” *Computational Geometry: Theory and Applications*, **47**, pp. 589–604, 2014.
- [11] Q. Feng, S. Li, X. Meng and J. Wang, “An improved FPT algorithm for the flip distance problem,” *Information and Computation*, **281**, 104708, 2021.
- [12] I. Kanj, E. Sedgewick and G. Xia, “Computing the flip distance between triangulations,” *Discrete and Computational Geometry*, **58**, pp. 313–344, 2017.
- [13] S. Cleary and K. St. John, “A linear-time approximation algorithm for rotation distance,” *Journal of Graph Algorithms and Applications*, **14**, pp. 385–390, 2010.
- [14] H. Li and G. Xia, “An  $\mathcal{O}(3.82^k)$  time FPT algorithm for convex flip distance,” In *Proceedings of STACS 2023*, pp. 44:1–44:14, 2023.
- [15] J. A. De Loera, J. Rambau and F. Santos, *Triangulations*, Springer, 2010.
- [16] F. Santos, “Non-connected toric Hilbert schemes,” *Mathematische Annalen*, **332**, pp. 645–665, 2005.
- [17] F. Santos, “A point set whose space of triangulations is disconnected,” *Journal of the American Mathematical Society*, **13**, pp. 611–637, 2000.
- [18] M. L. Balinski, “On the graph structure of convex polyhedra in  $n$ -space,” *Pacific Journal of Mathematics*, **11**, pp. 431–434, 1961.
- [19] G. M. Ziegler, *Lectures on Polytopes*, Springer, 1995.
- [20] F. Santos, “A counterexample to the Hirsch conjecture,” *Annals of Mathematics*, **176**, pp. 383–412, 2011.
- [21] B. Matschke, F. Santos and C. Weibel, “The width of five-dimensional prisms,” *Proceedings of the London Mathematical Society*, **110**, pp. 647–672, 2015.
- [22] N. Sukegawa, “An asymptotically improved upper bound on the diameter of polyhedra,” *Discrete and Computational Geometry*, **62**, pp. 690–699, 2019.
- [23] G. Kalai and D. Kleitman, “A quasi-polynomial bound for the diameter of graphs of polyhedra,” *Bulletin of the American Mathematical Society*, **26**, pp. 315–316, 1992.
- [24] A. M. Frieze and S.-H. Teng, “On the complexity of computing the diameter of a polytope,” *Computational Complexity*, **4**, pp. 207–219, 1994.
- [25] L. Sanità, “The diameter of the fractional matching polytope and its hardness implications,” In *Proceedings of FOCS 2018*, pp. 910–921, 2018.
- [26] D. Naddef, “The Hirsch conjecture is true for  $(0, 1)$ -polytopes,” *Mathematical Programming*, **45**, pp. 109–110, 1989.
- [27] C. H. Papadimitriou, “The adjacency relation on the traveling salesman polytope is NP-Complete,” *Mathematical Programming*, **14**, pp. 312–324, 1978.
- [28] D. Geist and E. Y. Rodin, “Adjacency of the 0-1 knapsack problem,” *Computers & Operations Research*, **19**, pp. 797–800, 1992.
- [29] T. Matsui, “NP-completeness of non-adjacency relations on some 0-1-polytopes,” *Lecture Notes in Operations Research*, **1**, pp. 249–258, 1995.
- [30] O. Aichholzer, J. Cardinal, T. Huynh, K. Knauer, T. Mütze, R. Steiner and B. Vogtenhuber, “Flip distances between graph orientations,” *Algorithmica*, **83**, pp. 116–143, 2021.
- [31] T. Ito, N. Kakimura, N. Kamiyama, Y. Kobayashi and Y. Okamoto, “Shortest reconfiguration of perfect matchings via alternating cycles,” *SIAM Journal of Discrete Mathematics*, **36**, pp. 1102–1123, 2022.
- [32] V. Chvátal, “On certain polytopes associated with graphs,” *Journal of Combinatorial Theory B*, **18**, pp. 138–154, 1975.
- [33] J. Cardinal and R. Steiner, “Inapproximability of shortest paths on perfect matching polytopes,” In *Proceedings of IPCO 2023*, pp. 72–86, 2023.