彩色遷移問題から制約充足遷移問題へ

岩政　勇仁

組合せ遷移とは,「離散的な状態空間上での遷り変わり」を「計算」という観点から解析する理論計算機科学の一分野である．さまざまな組合せ問題（ある条件を満たす解が存在するか否かを判定する組合せ的な問題）の「遷移版」ともよぶべき組合せ遷移問題が多様な文脈から提案され，それらの理論的な解析が進められてきた．本稿では，グラフの彩色問題の遷移版である彩色遷移問題と，その拡張である制約充足遷移問題について，特に多項式時間で解けるクラスを中心に概説する．

キーワード：彩色遷移問題，制約充足遷移問題，多項式時間可解性

1. はじめに

組合せ遷移とは,「離散的な状態空間上での遷り変わり」を「計算」という観点から解析する理論計算機科学の一分野である．さまざまな組合せ問題（ある条件を満たす解が存在するか否かを判定する組合せ的な問題）の「遷移版」ともよぶべき組合せ遷移問題が多様な文脈から提案され，それらの理論的な解析が進められてきた．

ほとんどの組合せ遷移問題はPSPACE（多項式空間領域で解ける問題クラス）に属し，少しでも設定を一般的にするとPSPACE完全[1]となってしまうものも多い．一方，適切に問題クラスに制限を加えることで，多項式時間で解けることもある．組合せ遷移において，多項式時間アルゴリズムは以下の三つのアプローチをもとにして得られることが多々ある：

- 不変量によるアプローチ；
- 貪欲な解更新アプローチ；
- 代表元によるアプローチ．

さて本稿では，グラフの彩色問題の遷移版である**彩色遷移問題**と，その拡張である**制約充足遷移問題**について，特に多項式時間で解けるクラスを中心に概説する．またそれらを通じて，上記の三種類のアプローチの一例を述べる．

2. 彩色遷移問題

彩色遷移問題の定義をする前に，グラフの彩色問題を導入する．kを固定された正整数とする．正整数kに対して，グラフGの**k彩色**とは，Gの頂点集合$V(G)$からk個の色からなる集合$\{0,1,\ldots,k-1\}$への写像$\alpha : V(G) \to \{0,1,\ldots,k-1\}$であって，任意の枝$\{u,v\} \in E(G)$に対して$\alpha(u) \neq \alpha(v)$となるもののことをいう．**$k$彩色問題**とは，入力グラフ$G$に$k$彩色が存在するか否かを判定する問題である．この問題は，

- $k \leq 2$のとき多項式時間可解,
- $k \geq 3$のときNP完全

となることが知られている．

では，k彩色問題の「遷移版」を考えよう．**k彩色遷移問題**とは，以下で定義される判定問題である：

入力　グラフGと，そのk彩色$\alpha, \beta : V(G) \to \{0,1,\ldots,k-1\}$.

問題　k彩色であることを保ったまま一つの頂点の色を変更することを繰り返し，αからβに遷移可能か？ すなわち，Gのk彩色の列$(\alpha = \gamma_0, \gamma_1, \ldots, \gamma_\ell = \beta)$であり，任意の$i = 1,\ldots,\ell$に対して$\gamma_{i-1}$と$\gamma_i$はちょうど一つの頂点の色のみ異なるようなものが存在するか？

また,（具体的なkを指定せずに述べる）上記のような問題を総称して**彩色遷移問題**とよぶ．

彩色遷移問題においても，色数kをパラメータとしたときの計算量の分類は完了している．具体的には，k彩色遷移問題は,

- $k \leq 3$のとき多項式時間可解 [1],
- $k \geq 4$のときPSPACE完全 [2]

となることが知られている．特に,「3彩色遷移問題が多項式時間で解ける」という結果は,「3彩色問題がNP完全である」という事実とは対照的なものとなっている．すなわち,「グラフに3彩色が存在するか否かの判定は難しい（NP完全）が，与えられた二つの3彩色が遷移可能かの判定は容易（多項式時間可解）」という興味深い現象が生じる．

いわまさ　ゆに
京都大学大学院情報学研究科
〒606–8501 京都市左京区吉田本町

[1] PSPACE完全はNP完全よりも難しい（だろうと予想されている）.

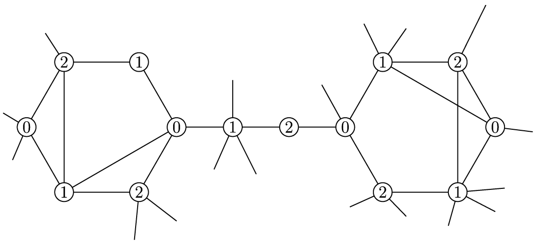

図 1　凍っている頂点の例
図のように彩色されたグラフにおいては，どの頂点の色も変更できないことがわかる．

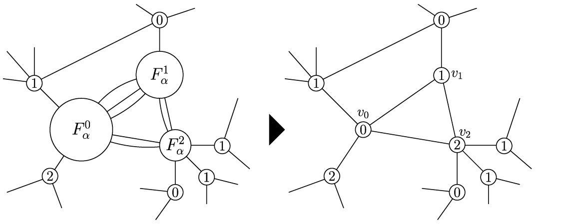

図 2　縮約のイメージ

2.1　3 彩色遷移問題：不変量によるアプローチ

本節では，Cereceda et al. [1] によって示された「3 彩色遷移問題の多項式時間可解性」について概説する．これは，彩色遷移問題の文脈において最も重要な成果の一つであり，「不変量によるアプローチ」で多項式時間アルゴリズムが設計されている例となっている．

グラフ G と，G の 3 彩色 $\alpha, \beta : V(G) \to \{0,1,2\}$ を 3 彩色遷移問題の入力とする．G の 3 彩色 γ に関して頂点 $v \in V(G)$ が**凍っている** (frozen) とは，γ から遷移可能な任意の 3 彩色 γ' に対して $\gamma(v) = \gamma'(v)$ となることをいう．たとえば，グラフ G 内の任意の三角形内の頂点はどんな 3 彩色に関しても凍っている．図 1 も参照されたい． 色 $c \in \{0,1,2\}$ に対して，γ に関して凍っている頂点 v であり $\gamma(v) = c$ となるものの集合を F_γ^c と定義すると，以下は明らかに α から β に遷移可能であるための必要条件となる：

(F)　各色 $c \in \{0,1,2\}$ に対して，$F_\alpha^c = F_\beta^c$.

条件 (F) が成立していると仮定しよう．頂点集合 $F_\alpha^0, F_\alpha^1, F_\alpha^2$ が非空のとき，$F_\alpha^0, F_\alpha^1, F_\alpha^2$ をそれぞれ頂点 v_0, v_1, v_2 へ縮約し多重辺を除いて得られたグラフを再び G と書くことにし，α, β も縮約後のグラフ G に対して自然に定まる 3 彩色を表すこととする（図 2）．グラフ G のサイクル C に適当に向きを定めることで得られる有向サイクル $\overrightarrow{C}$ に対して，3 彩色 γ に関する**回転数** (winding number) $w_\gamma(\overrightarrow{C})$ を

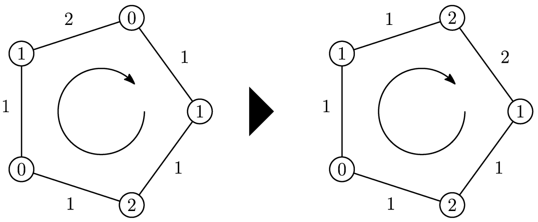

図 3　右上の頂点の色の変更による dist の変化
この例では回転数は 6 となる．

$$w_\gamma(\overrightarrow{C}) := \sum_{(u,v)\in\overrightarrow{C}} \mathrm{dist}(\gamma(u), \gamma(v))$$

と定める．ここで，色 $c, c' \in \{0,1,2\}$ に対して，それらの距離 $\mathrm{dist}(c, c') \in \{0,1,2\}$ を，有向 3 サイクル $\{(0,1),(1,2),(2,0)\}$ における c, c' 間の距離として定める．すなわち $\mathrm{dist}(c,c') = c' - c \pmod 3$ である．

さて，3 彩色 α において，ある頂点 v の色を変更したとしよう．変更後の 3 彩色を α' と書くことにする．このとき，v を含む（有向にした）サイクル $\overrightarrow{C}$ を任意にとってくる．$\overrightarrow{C}$ が $(u,v),(v,w)$ という弧（有効枝）を含んでいるとき，

$$\begin{aligned}&\mathrm{dist}(\alpha'(u), \alpha'(v)) + \mathrm{dist}(\alpha'(v), \alpha'(w))\\&= \mathrm{dist}(\alpha(u), \alpha(v)) + \mathrm{dist}(\alpha(v), \alpha(w))\end{aligned}$$

となることが容易に確認できる（図 3）．このことから，任意の有向化したサイクル $\overrightarrow{C}$ に対して，$w_\alpha(\overrightarrow{C}) = w_{\alpha'}(\overrightarrow{C})$ が成立する．この観察により，α から β に遷移可能であるための必要条件として以下が得られる：

(W)　G の任意の有向化したサイクル $\overrightarrow{C}$ に対して，$w_\alpha(\overrightarrow{C}) = w_\beta(\overrightarrow{C})$.

以上の議論から，条件 (F) と条件 (W) が α から β に遷移可能であるための必要条件となることがわかった．Cereceda et al. [1] はこの逆が成り立つこと，すなわち，(F) と (W) によって，遷移可能性を特徴づけられることを示した．

定理 1.　α から β に遷移可能であるための必要十分条件は，条件 (F) と条件 (W) を満たすことである．■

Cereceda et al. [1] はさらに，条件 (F), (W) を満たしているか多項式時間で判定できることを示し，遷移可能であるときに実際の遷移列を出力する多項式時間アルゴリズムも設計している：

定理 2.　3 彩色遷移問題は多項式時間で解ける．■

条件 (F) と (W) は，3 彩色遷移問題において「遷移の過程で不変なもの（不変量)」となる．このように，問題特有の不変量を見出すことで遷移可能性を特徴づけられることがあり，それが多項式時間アルゴリズムの構築に繋がりうる．

2.2 遷移制約下の彩色遷移問題

「なぜ 3 彩色遷移問題は解けるのか？」「3 彩色遷移問題のどの構造が多項式時間可解性に重要なのか？」を解明することを目的の一つとして，彩色遷移問題を拡張し，計算量の分類を試みる研究もある．本節では，そのうちの一つである，Osawa et al. [3–5] により導入された**遷移制約下の彩色遷移問題**について説明する．

$\overrightarrow{R}$ を頂点集合が色集合 $\{0,1,\ldots,k-1\}$ であるような有向グラフとする．このとき，$\overrightarrow{R}$ **遷移制約下の k 彩色遷移問題**とは，以下で定義される判定問題である：

<u>入力</u>　グラフ G と，その k 彩色 $\alpha,\beta : V(G) \to \{0,1,\ldots,k-1\}$.

<u>問題</u>　k 彩色であることを保ったまま一つの頂点の色を<u>$\overrightarrow{R}$ の弧に沿って</u>変更することを繰り返し，α から β に遷移可能か？ すなわち，G の k 彩色の列 $(\alpha=\gamma_0,\gamma_1,\ldots,\gamma_\ell=\beta)$ であり，任意の $i=1,\ldots,\ell$ に対して γ_{i-1} と γ_i はちょうど一つの頂点 v の色のみ異なり，さらに $(\gamma_{i-1}(v),\gamma_i(v))$ が $\overrightarrow{R}$ の弧となるようなものが存在するか？

つまり，$\overrightarrow{R}$ 遷移制約下の k 彩色遷移問題において，$\overrightarrow{R}$ の弧は「許される頂点の色変更」を表している．無向グラフ R に対しても同様に **R 遷移制約下の k 彩色遷移問題**を定義できる．k 頂点完全グラフを K_k と書くとすると，「K_k 遷移制約下の k 彩色遷移問題」は通常の「k 彩色遷移問題」と等価である．

Osawa et al. [3, 4] により，遷移制約が無向グラフ R であるときの計算量の分類がある程度成されており，R が連結無向グラフのとき

- R に二つ以上のサイクルがある，もしくは最大次数が 4 以上のとき，PSPACE 完全,
- R の最大次数が 2 以下のとき，多項式時間可解

となることが明らかになった．このことから，「3 彩色遷移問題が解けるのは，対応する遷移制約がサイクルとなるため」という理解が可能になった．

一方，遷移制約が有向グラフ $\overrightarrow{R}$ の場合の分類はあまり進んでいるとはいえない．$\overrightarrow{R}$ が非巡回有向グラフ (DAG) のとき，$\overrightarrow{R}$ 遷移制約下の k 彩色遷移問題が NP に属することは容易に確認できる．Osawa [5] は，$\overrightarrow{R}$ が有向木のとき $\overrightarrow{R}$ 遷移制約下の k 彩色遷移問題が多項式時間で解けること，また $\overrightarrow{R}$ が図 4 に示すような多向木（polytree; 枝の向きを無視して得られる有向グラフが木となるような DAG)[2]のとき NP 完全となることを示した．Fujii et al. [6] は，$\overrightarrow{R}$ が有向サイクルのとき，もしくは，以下の条件 (S) を満たすマルチツリー（multitree; 任意の 2 頂点間に有向パスが高々 1 本しかない DAG）のとき，多項式時間可解であることを示した：

(S)　$\overrightarrow{R}$ 内の任意の有向パス $(c_0,c_1,\ldots,c_\ell)$ と任意の $i,j\in\{0,1,\ldots,\ell\}$ に対して，c_i の入次数と c_j の出次数がそれぞれ 2 以上となるとき，$i\le j$, $i=\ell$, $j=0$ のいずれかが成り立つ．

条件 (S) は本質的には，“分岐した後合流するという構造（図 5)”がないことを課した条件である．

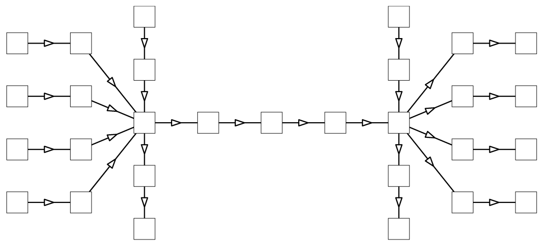

図 4　$\overrightarrow{R}$ 遷移制約下の k 彩色遷移問題が NP 完全となる多向木 $\overrightarrow{R}$

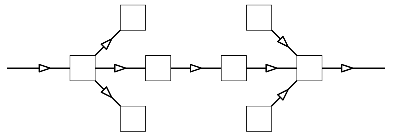

図 5　条件 (S) により禁止される“分岐した後合流する”構造

2.3 グラフ準同型遷移問題

「3 彩色遷移問題の多項式時間可解性の本質の解明」を目的（の一つ）とした別の研究である，**グラフ準同型遷移問題**について紹介する．

グラフ G の k 彩色 α は，「G から k 頂点完全グラフ K_k への準同型写像」とみなすことができる．ここで，無向グラフ G,H に対して，G から H の**準同型写像**，もしくは G の **H 彩色**とは，G の頂点集合 $V(G)$ から H の頂点集合 $V(H)$ への写像 $\alpha : V(G)\to V(H)$ であり，任意の G の枝 $\{u,v\}\in E(G)$ に対して $\{\alpha(u),\alpha(v)\}\in E(H)$ を満たすもののことをいう．G,H が有向グラフのときも “任意の G の弧 $(u,v)\in A(G)$ に対して $(\alpha(u),\alpha(v))\in A(H)$ を満たす” とすることで同様に

[2] 見やすさのため，文献 [5] で NP 完全であることが示されたグラフから少し変更を加えている．

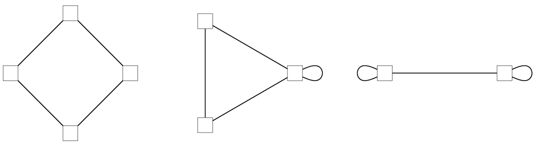

図 6　多項式時間可解性を誘導する無向グラフ H の禁止構造

準同型写像を定義できる．k 彩色の定義である「任意の枝 $\{u,v\} \in E(G)$ に対して $\alpha(u) \neq \alpha(v)$」と「任意の枝 $\{u,v\} \in E(G)$ に対して $\{\alpha(u), \alpha(v)\} \in E(K_k)$」は等価な条件であるため，$k$ 彩色と K_k 彩色が等価な概念であることがわかる．H 彩色 α に対して，頂点 v の α による行き先 $\alpha(v) \in V(H)$ を v の（α による）**ラベル**とよぶことにする．これは k 彩色においては「色」とよんでいたものに対応する．

H を固定されたグラフとする．***H* 彩色遷移問題**とは，以下で定義される判定問題である：

入力　グラフ G と，その H 彩色 $\alpha, \beta : V(G) \to V(H)$.

問題　H 彩色であることを保ったまま G の一つの頂点のラベルを変更することを繰り返し，α から β に遷移可能か？ すなわち，G の H 彩色の列 $(\alpha = \gamma_0, \gamma_1, \ldots, \gamma_\ell = \beta)$ であり，任意の $i = 1, \ldots, \ell$ に対して γ_{i-1} と γ_i はちょうど一つの頂点のラベルのみ異なるようなものが存在するか？

また，上記のような問題を総称して，**グラフ準同型遷移問題**とよぶ.

2.1 節で述べた彩色遷移問題における結果から，「K_k 彩色遷移問題は $k \leq 3$ のとき多項式時間可解で $k \geq 4$ のとき PSPACE 完全」ということがわかる．Wrochna [7] は，無向グラフ H が図 6 の三つのグラフを部分グラフとして含まないとき，H 彩色遷移問題が多項式時間で解けることを示した．ここでは，「H 彩色 α, β が遷移可能であるためには，ある位相空間の間の α, β に対応する連続写像がホモトピックであることが必要」という観察が重要な役割を果たしている（これも「不変量」とみなせる）．Wrochna [7] の結果から「3 彩色遷移問題が解けるのは，K_3 が図 6 のいずれのグラフも部分グラフとして含まないため」という理解も可能になった.

さらに H をパラメータとした計算量の分類が進められており，特別な無向/有向グラフ H に対する H 彩色遷移問題の多項式時間可解性や PSPACE 完全性に関して徐々に解明されている [8–13] が，完全な分類には未だ至っていない.

3. 制約充足遷移問題

2.3 節で導入した「二つのグラフ間の準同型写像」を「二つの関係構造間の準同型写像」へと拡張することで，さらに広範な組合せ遷移問題を定式化することができる．本節では「二つの関係構造間の準同型写像」の遷移である**制約充足遷移問題**を導入し，Gopalan et al. [14] や Schwerdtfeger [15, 16] によって確立されたドメインが二元集合 $\{0,1\}$ の場合の計算量の分類について概説する.

3.1 準備

まず，関係構造やその間の準同型写像について定義する．関係記号の有限集合 $\sigma = \{R_1, R_2, \ldots, R_k\}$ を**シグネチャ**とよぶ．各関係記号 R_i には**アリティ**とよばれる自然数 r_i が付随している．**ドメイン**とよばれる有限集合 $V(\mathcal{G})$ と各関係記号 R_i に対応する r_i 項関係 $R_i(\mathcal{G}) \subseteq V(\mathcal{G})^{r_i}$ の組 $\mathcal{G} = (V(\mathcal{G}); R_1(\mathcal{G}), R_2(\mathcal{G}), \ldots, R_k(\mathcal{G}))$ を，シグネチャ $\sigma = \{R_1, R_2, \ldots, R_k\}$ 上の**関係構造** (relational structure)，もしくは **σ 構造** (σ-structure) とよぶ．σ 構造 $\mathcal{G}, \mathcal{H}$ に対し，$\mathcal{G}$ のドメイン $V(\mathcal{G})$ から $\mathcal{H}$ のドメイン $V(\mathcal{H})$ への写像 $\alpha : V(\mathcal{G}) \to V(\mathcal{H})$ が**準同型**であるとは，任意の関係記号 $R_i \in \sigma$ と任意の $\mathbf{v} = (v_1, \ldots, v_{r_i}) \in R_i(\mathcal{G})$ に対し，$\alpha(\mathbf{v}) := (\alpha(v_1), \ldots, \alpha(v_{r_i})) \in R_i(\mathcal{H})$ となることをいう．本稿では，これまでの表現に合わせ，$\mathcal{G}$ から $\mathcal{H}$ への準同型写像を **$\mathcal{H}$ 彩色**とよぶことにする．また 2.3 節で導入した表現にならい，$\mathcal{H}$ 彩色 α に対して，$\mathcal{G}$ のドメインの元 $v \in V(\mathcal{G})$ の α による行き先 $\alpha(v) \in V(\mathcal{H})$ を v の（α による）**ラベル**とよぶ.

σ 構造 $\mathcal{G}, \mathcal{H}$ が与えられたとき，$\mathcal{G}$ から $\mathcal{H}$ への準同型写像が存在するか否かを判定する問題を**制約充足問題** (Constraint Satisfaction Problem; CSP) という．また特に，σ 構造 $\mathcal{H}$ を固定したうえで，σ 構造 $\mathcal{G}$ が入力として与えられたときに $\mathcal{G}$ から $\mathcal{H}$ への準同型が存在するか判定する問題を CSP($\mathcal{H}$) と書く.

制約充足問題は，理論計算機科学分野で現れるさまざまな判定問題を定式化できる枠組みである.

例 1（グラフ準同型問題）**.**　$\sigma = \sigma_{\mathrm{graph}} := \{A\}$ とし，A のアリティを 2 とする．有向グラフ G は，頂点集合 $V(G)$ をドメイン，弧集合 $A(G)$ を $V(G)$ 上の 2 項関係とみなすことで，自然に σ 構造とみなすことができる．有向グラフ G から H へのグラフ準同型は，σ 構造 G から σ 構造 H への準同型と等価な概念となるた

め，CSP(H) は H 彩色問題と等価な問題となる．無向グラフも，各無向枝 $\{u,v\}$ を 2 本の弧 $(u,v),(v,u)$ に置き換えた有向グラフを考えることで同様に σ 構造とみなすことができるため，無向グラフのグラフ準同型問題も同様に制約充足問題として定式化できる．

例 2 (3SAT)**.** $\sigma = \sigma_{\mathrm{3SAT}} := \{R_{ijk} \mid (i,j,k) \in \{0,1\}^3\}$ とし，各 i,j,k に対し R_{ijk} のアリティを 3 とする．σ 構造 $\mathcal{H}$ のドメイン $V(\mathcal{H})$ を二元集合 $\{0,1\}$ とし，各 $R_{ijk} \in \sigma$ に対して，3 項関係 $R_{ijk}(\mathcal{H})$ を $R_{ijk}(\mathcal{H}) := \{0,1\}^3 \setminus \{(i,j,k)\}$ と定める．このとき，CSP($\mathcal{H}$) は 3SAT 問題と等価な問題となる．

たとえば，3CNF 式 $\varphi = (x_1 \vee x_3 \vee x_5) \wedge (x_4 \vee \overline{x_2} \vee x_1) \wedge (x_2 \vee x_5 \vee x_5)$ に対して，σ 構造 $\mathcal{G}_\varphi$ を

$$\begin{aligned} V(\mathcal{G}_\varphi) &:= \{x_1,x_2,x_3,x_4,x_5\}, \\ R_{000}(\mathcal{G}_\varphi) &:= \{(x_1,x_3,x_5),(x_2,x_5,x_5)\}, \\ R_{010}(\mathcal{G}_\varphi) &:= \{(x_4,x_2,x_1)\} \end{aligned}$$

とし，$(i,j,k) \neq (0,0,0),(0,1,0)$ なる i,j,k に対しては $R_{ijk}(\mathcal{G}_\varphi) := \emptyset$ と定めると，$\mathcal{G}_\varphi$ から $\mathcal{H}$ へ準同型が存在することと，3CNF 式 φ に充足解が存在することが同値となる．

また，$\sigma = \sigma_{\mathrm{3SAT}}$ にアリティが 1 の関係記号 zero, one を加えたシグネチャを σ_{c} とし，上記で定義した σ 構造 $\mathcal{H}$ に $\mathrm{zero}(\mathcal{H}_{\mathrm{c}}) := \{0\}, \mathrm{one}(\mathcal{H}_{\mathrm{c}}) := \{1\}$ を加えてできる σ_{c} 構造を $\mathcal{H}_{\mathrm{c}}$ とする．このとき，CSP($\mathcal{H}_{\mathrm{c}}$) は“定数代入を許した”3SAT 問題，すなわち，3CNF に現れる変数のいくつかに 0 もしくは 1 を代入して得られる CNF の充足可能性を判定する問題と等価になる． ■

では制約充足問題，特に CSP($\mathcal{H}$) の「遷移版」を考えよう．ここで，$\mathcal{H}$ は固定された σ 構造である．**$\mathcal{H}$ 彩色遷移問題**，もしくは RCSP($\mathcal{H}$) とは，以下で定義される判定問題である：

<u>入力</u>　σ 構造 $\mathcal{G}$ と，その $\mathcal{H}$ 彩色 $\alpha, \beta : V(\mathcal{G}) \to V(\mathcal{H})$.

<u>問題</u>　$\mathcal{H}$ 彩色であることを保ったまま $\mathcal{G}$ のドメインの一つの元のラベルを変更することを繰り返し，α から β に遷移可能か？ すなわち，$\mathcal{G}$ の $\mathcal{H}$ 彩色の列 $(\alpha = \gamma_0, \gamma_1, \ldots, \gamma_\ell = \beta)$ であり，任意の $i = 1, \ldots, \ell$ に対して γ_{i-1} と γ_i はちょうど一つの元のラベルのみ異なるようなものが存在するか？

また上記のような問題を総称して，**制約充足遷移問題**とよぶ．

3.2　二元集合制約充足遷移問題

$\mathcal{H}$ のドメイン $V(\mathcal{H})$ が二元集合 $\{0,1\}$ のときの $\mathcal{H}$ 彩色遷移問題の計算量の分類は，Gopalan et al. [14] や Schwerdtfeger [15, 16] によって進展した．本節では，その成果について概説する．

まず定理の主張を述べてから用語を定義する．

定理 3.　σ_{c} をアリティが 1 の関係記号 zero, one を含むシグネチャとし，$\mathcal{H}_{\mathrm{c}}$ を $V(\mathcal{H}) = \{0,1\}$ であり $\mathrm{zero}(\mathcal{H}_{\mathrm{c}}) = \{0\}, \mathrm{one}(\mathcal{H}_{\mathrm{c}}) = \{1\}$ を満たす σ_{c} 構造とする．$\mathcal{H}_{\mathrm{c}}$ が以下の 3 条件のいずれかを満たすとき，$\mathcal{H}_{\mathrm{c}}$ 彩色遷移問題は多項式時間可解である：

条件 1　すべての $R \in \sigma_{\mathrm{c}}$ に対し，$R(\mathcal{H}_{\mathrm{c}})$ が safely componentwise bijunctive.

条件 2　すべての $R \in \sigma_{\mathrm{c}}$ に対し，$R(\mathcal{H}_{\mathrm{c}})$ が safely OR-free.

条件 3　すべての $R \in \sigma_{\mathrm{c}}$ に対し，$R(\mathcal{H}_{\mathrm{c}})$ が safely NAND-free.

そうでないとき（上記のいずれの条件も満たさないとき），$\mathcal{H}_{\mathrm{c}}$ 彩色遷移問題は PSPACE 完全である． ■

以下，3.2.1 節で条件 1 に現れる “safely componentwise bijunctive” の定義とその条件を満たす問題に対して動く多項式時間アルゴリズムを，3.2.2 節で条件 2 や 3 に現れる “safely OR-/NAND-free” の定義とその条件を満たす問題に対して動く多項式時間アルゴリズムを概説する．

その前に共通で使用する用語についてここで準備する．$R \subseteq \{0,1\}^r$ を $\{0,1\}$ 上の r 項関係とする．頂点集合を R とし，$\mathbf{u}, \mathbf{v} \in R$ のハミング距離が 1 となるときに枝 $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}$ を引いてできるグラフを G_R と書く．G_R の連結成分に対応する R の部分集合を，R の**連結成分**とよぶ．また，σ_{c} 構造 $\mathcal{G}$ から $\mathcal{H}_{\mathrm{c}}$ への準同型写像全体の集合は $\{0,1\}$ 上の $|V(\mathcal{G})|$ 項関係とみなせる．この $|V(\mathcal{G})|$ 項関係に対し上記のように構成したグラフを同様に $G_{\mathcal{G}}$ と書く．$\mathcal{G}$ から $\mathcal{H}_{\mathrm{c}}$ への準同型写像 α, β に対してそれらが遷移可能であることと，α, β が $G_{\mathcal{G}}$ において同じ連結成分に属することが等価であることに注意されたい．

R の i 番目の要素 $(1 \leq i \leq r)$ を定数 $c \in \{0,1\}$ に固定したうえで残りの要素に制限することで得られる $(r-1)$ 項関係 $\{(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_r) \mid (x_1, \ldots, x_{i-1}, c, x_{i+1}, \ldots, x_r) \in R\} \subseteq \{0,1\}^{r-1}$ を“R から定数代入で得られる関係”とよぶこと

にする．また R の i 番目と j 番目の要素 $(1 \le i < j \le r)$ を同一視することで得られる $(r-1)$ 項関係 $\{(x_1,\ldots,x_{i-1},x_{i+1},\ldots,x_r) \mid (x_1,\ldots,x_{i-1},x_j,x_{i+1},\ldots,x_r) \in R\} \subseteq \{0,1\}^{r-1}$ を "R から変数の同一視で得られる関係" とよぶことにする．

3.2.1 Safely componentwise bijunctive の定義とアルゴリズム：貪欲な解更新アプローチ

多項式時間可解性を誘導する条件 1 に現れる "safely componentwise bijunctive" の定義と，条件 1 を満たす問題に対して動く多項式時間アルゴリズムについて述べる．このアルゴリズムは「貪欲な解更新アプローチ」により得られる．

多数決演算子 maj : $\{0,1\}^3 \to \{0,1\}$ を，任意の $x,y \in \{0,1\}$ に対して $\mathrm{maj}(x,x,y) = \mathrm{maj}(x,y,x) = \mathrm{maj}(y,x,x) = x$ となる 3 項演算子と定義する（このような 3 項演算子は唯一に定まる）．R の任意の連結成分 R' が maj で閉じているとき，すなわち，任意の $\mathbf{v}^1 = (v_1^1,\ldots,v_r^1), \mathbf{v}^2 = (v_1^2,\ldots,v_r^2), \mathbf{v}^3 = (v_1^3,\ldots,v_r^3) \in R'$ に対し，$\mathrm{maj}(\mathbf{v}^1,\mathbf{v}^2,\mathbf{v}^3) := (\mathrm{maj}(v_1^1,v_1^2,v_1^3),\ldots,\mathrm{maj}(v_r^1,v_r^2,v_r^3)) \in R'$ となるとき，R は **componentwise bijunctive** であるという．この条件は「R の任意の連結成分がある 2CNF 式の充足解の集合に一致している」と言いかえても等価である．また，R から定数代入や変数の同一視を繰り返して得られる任意の関係が componentwise bijunctive であるとき，R を **safely componentwise bijunctive** であるという．

σ 構造 $\mathcal{G}$ から $\mathcal{H}_\mathrm{c}$ への準同型写像 α,β に対して，α,β 間の 1 ノルム（またはハミング距離）$\|\beta-\alpha\|_1$ を $\|\beta-\alpha\|_1 := |\{v \in V(\mathcal{G}) \mid \alpha(v) \ne \beta(v)\}|$ と定義する．定義より，α から β へ遷移可能であるとき，その遷移列の長さは少なくとも $\|\beta-\alpha\|_1$ 以上であることがわかる．Gopalan et al. [14] と Schwerdtfeger [15, 16] は，$\mathcal{H}_\mathrm{c}$ が定理 3 の条件 1 を満たすとき，遷移可能ならば長さ $\|\beta-\alpha\|_1$ の遷移列が必ず存在することを示した．

定理 4. すべての $R \in \sigma_\mathrm{c}$ に対して $R(\mathcal{H}_\mathrm{c})$ が safely componentwise bijunctive であるとする．$\mathcal{G}$ を σ_c 構造とし，α,β を $\mathcal{G}$ から $\mathcal{H}_\mathrm{c}$ への準同型写像とする．α から β へ遷移可能であるとき，長さ $\|\beta-\alpha\|_1$ の遷移列が存在する． ■

定理 4 から，$\mathcal{G}$ から $\mathcal{H}_\mathrm{c}$ への準同型写像 α,β の遷移可能性を判定する多項式時間アルゴリズムが直ちに得られる：

- 「$\alpha(v) \ne \beta(v)$ を満たすある $v \in V(\mathcal{G})$ に対し，$\alpha(v)$ の行き先を $\beta(v)$ に変えた写像が $\mathcal{G}$ から $\mathcal{H}_\mathrm{c}$ への準同型写像となるならば α をそれに更新する」という操作を可能な限り繰り返す．
- $\alpha = \beta$ のとき「遷移可能」，$\alpha \ne \beta$ のとき「遷移不可能」と出力する．

このように「最短遷移列長が常に自明な下界に一致する」場合は，"目的の解に近づく変換が可能なら，貪欲にそれに更新する" というアルゴリズムにより，遷移可能性判定ができる．

3.2.2 Safely OR-/NAND-free の定義とアルゴリズム：代表元によるアプローチ

多項式時間可解性を誘導する条件 2 に現れる "safely OR-free" の定義と，条件 2 を満たす問題に対して動く多項式時間アルゴリズムについて述べる．条件 3 に現れる "safely NAND-free" の定義とアルゴリズムは，"safely OR-free" に対する以下の説明内の「0」「1」「極小」を，それぞれ適切に「1」「0」「極大」に変えることで得られるため，本稿では省略する．このアルゴリズムは「代表元によるアプローチ」により得られる．

$R \subseteq \{0,1\}^r$ を $\{0,1\}$ 上の r 項関係とする．R から定数代入や変数の同一視を繰り返して得られる $\{0,1\}$ 上の 2 項関係がいずれも $\mathrm{OR} = \{(0,1),(1,0),(1,1)\}$ と異なるとき，R を **safely OR-free** であるという．（特に，$r \le 1$ なら R は必ず safely OR-free である．）

$\{0,1\}$ に $0<1$ として順序関係を入れ，それを $\mathcal{G}$ から $\mathcal{H}_\mathrm{c}$ への準同型写像全体の集合へ自然に拡張する．すなわち，$\mathcal{G}$ から $\mathcal{H}_\mathrm{c}$ への準同型写像 α,β に対して，任意の $v \in V(\mathcal{G})$ で $\alpha(v) \le \beta(v)$ となるとき $\alpha \le \beta$ と定義する．

定理 5. $\mathcal{G}$ を σ_c 構造とする．すべての $R \in \sigma_\mathrm{c}$ に対して $R(\mathcal{H}_\mathrm{c})$ が safely OR-free であるとき，$G_\mathcal{G}$ の各連結成分は唯一の極小解をもつ． ■

定理 5 から，$\mathcal{G}$ から $\mathcal{H}_\mathrm{c}$ への準同型写像 α,β の遷移可能性を判定する多項式時間アルゴリズムが直ちに得られる：

- 「$\alpha(v) = 1$ を満たすある $v \in V(\mathcal{G})$ に対し，$\alpha(v)$ の行き先を 0 に変えた写像が $\mathcal{G}$ から $\mathcal{H}_\mathrm{c}$ への準同型写像となるならば α をそれに更新する」という操作を可能な限り繰り返し，α を含む $G_\mathcal{G}$ の連結成分の極小解 α^* を求める．同様にして β を含む

$G_{\mathcal{G}}$ の連結成分の極小解 β^* も求める．

- $\alpha^* = \beta^*$ のとき「遷移可能」，$\alpha^* \neq \beta^*$ のとき「遷移不可能」と出力する．

このように，遷移可能な解の中で特別な“代表元”（今回の場合は極小解）を定め，遷移可能な代表元が一致するか否かにより遷移可能性判定ができる場合がある．

4. おわりに

本稿では，彩色遷移問題とその拡張である制約充足遷移問題について，主に多項式時間可解なクラスを中心に紹介してきた．また具体例を通じて，多項式時間アルゴリズム構築の鍵となりうる三つのアプローチを紹介した．

以下では今後の研究の方向について述べたい．彩色遷移問題においては色数 k をパラメータとした計算量の分類は完了しているが，遷移制約をパラメータとした分類は，無向遷移制約でも完了しておらず，面白い研究方向の一つだと考えられる．

またグラフ準同型遷移問題における「有向グラフ H をパラメータとした H 彩色遷移問題の計算量の分類」や，その拡張の制約充足遷移問題における「σ 構造 $\mathcal{H}$ をパラメータとした $\mathcal{H}$ 彩色遷移問題の計算量の分類」は研究が盛んに進められているが，完全な分類の目処は未だたっていない．この「$\mathcal{H}$ をパラメータとした計算量の分類」は，遷移ではない通常の制約充足問題（準同型写像の存在を判定する問題）において長年取り組まれてきたテーマであり，近年完全に解決された [17, 18]．その解決に大きく貢献したのは**ポリモルフィズム** (polymorphism) とよばれる代数的概念である [19]．制約充足問題の「最適化版」である**値付き制約充足問題** (Valued CSP; VCSP) [20] や「約束版」である**約束制約充足問題** (Promise CSP; PCSP) [21] でも，その計算量分類にポリモルフィズムを適切に拡張した概念が重要であることがわかっている．一方，制約充足問題の「遷移版」である制約充足遷移問題では，対応するポリモルフィズムの拡張概念がわかっていない．拡張概念は何なのか，そもそもそのようなものが存在するのか，なども含め，計算量分類に向けて今後の研究が進められていくと思われる．

謝辞　本稿執筆のお誘いをくださった伊藤健洋氏，岡本吉央氏，梅谷俊治氏に感謝いたします．また，原稿にコメントをくださった藤井宗一郎氏，木村慧氏，岡本吉央氏，鈴木顕氏に感謝いたします．

参考文献

[1] L. Cereceda, J. van den Heuvel and M. Johnson. “Finding paths between 3-colourings.” *Journal of Graph Theory*, **67**, pp. 69–82, 2011.
[2] P. Bonsma and L. Cereceda, “Finding paths between graph colourings: PSPACE-completeness and superpolynomial distances,” *Theoretical Computer Science*, **410**, pp. 5215–5226, 2009.
[3] H. Osawa, A. Suzuki, T. Ito and X. Zhou, “Complexity of coloring reconfiguration under recolorability constraints,” In *Proceedings of the 28th International Symposium on Algorithms and Computation (ISAAC 2017)*, pp. 62:1–62:12, 2017.
[4] H. Osawa, A. Suzuki, T. Ito and X. Zhou, “Algorithms for coloring reconfiguration under recolorability constraints,” In *Proceedings of the 29th International Symposium on Algorithms and Computation (ISAAC 2018)*, pp. 37:1–37:13, 2018.
[5] H. Osawa, “Coloring Reconfiguration Problems and Their Generalizations,” PhD Thesis, Tohoku University, 2020.
[6] S. Fujii, Y. Iwamasa, K. Kimura and A. Suzuki, “Algorithms for coloring reconfiguration under recolorability digraphs,” In *Proceedings of the 33rd International Symposium on Algorithms and Computation (ISAAC 2022)*, pp. 4:1–4:19, 2022.
[7] M. Wrochna, “Homomorphism reconfiguration via homotopy,” *SIAM Journal on Discrete Mathematics*, **34**, pp. 328–350, 2020.
[8] R. C. Brewster, S. McGuinness, B. Moore and J. A. Noel, “A dichotomy theorem for circular colouring reconfiguration,” *Theoretical Computer Science*, **639**, pp. 1–13, 2016.
[9] R. C. Brewster, J.-B. Lee and M. Siggers, “Recolouring reflexive digraphs,” *Discrete Mathematics*, **341**, pp. 1708–1721, 2018.
[10] J.-B. Lee, J. A. Noel and M. Siggers, “Reconfiguring graph homomorphisms on the sphere,” *European Journal of Combinatorics*, **86**, 103086, 2020.
[11] A. Dochtermann and A. Singh, “Homomorphism complexes, reconfiguration, and homotopy for directed graphs,” *European Journal of Combinatorics*, 110:103704, 2023.
[12] J.-B. Lee, J. A. Noel and M. Siggers. “Recolouring homomorphisms to triangle-free reflexive graphs,” *Journal of Algebraic Combinatorics*, **57**, pp. 53–73, 2023.
[13] B. Lévêque, M. Mühlenthaler and T. Suzan, “Reconfiguration of digraph homomorphisms,” In *Proceedings of the 40th International Symposium on Theoretical Aspects of Computer Science (STACS 2023)*, pp. 43:1–43:21, 2023.
[14] P. Gopalan, P. G. Kolaitis, E. Maneva and C. H. Papadimitriou, “The connectivity of Boolean satisfiability: Computational and structural dichotomies,” *SIAM Journal on Computing*, **38**, pp. 2330–2355, 2009.
[15] K. W. Schwerdtfeger, “A computational trichotomy for connectivity of Boolean satisfiability,” *Journal on Satisfiability, Boolean Modeling and Computation*, **8**, pp. 173–195, 2014.
[16] K. W. Schwerdtfeger, “Connectivity of Boolean

Satisfiability," PhD Thesis, University of Hanover, 2016.

[17] A. Bulatov, "A dichotomy theorem for nonuniform CSPs," In *Proceedings of the 58th IEEE Annual Symposium on Foundations of Computer Science (FOCS 2017)*, pp. 319–330, 2017.

[18] D. Zhuk, "A proof of the CSP dichotomy conjecture," *Journal of the ACM*, **67**, pp. 30:1–30:78, 2020.

[19] L. Barto, A. Krokhin and R. Willard, "Polymorphisms, and how to use them," *The Constraint Satisfaction Problem: Complexityand Approximability*, A. Krokhin and S. Živný (eds.), Schloss Dagstuhl-Leibniz-Zentrum fuer Informatik, pp. 1–44, 2017.

[20] A. Krokhin and S. Živný, "The complexity of valued CSPs," *The Constraint Satisfaction Problem: Complexity and Approximability*, A. Krokhin and S. Živný (eds.), Schloss Dagstuhl–Leibniz-Zentrum fuer Informatik, pp. 233–266, 2017.

[21] A. Krokhin and J. Opršal, "An invitation to the promise constraint satisfaction problem," *arXiv*, arXiv:2208.13538, 2022.

