組合せ遷移のアルゴリズム理論

大舘　陽太

本記事ではグラフの頂点部分集合の遷移問題，その中でも特に独立集合遷移問題に集中してさまざまな組合せ遷移問題のアルゴリズム理論的結果を紹介する．一般の頂点部分集合遷移問題に対するアルゴリズム的メタ定理についても紹介し，そのためのアルゴリズム技術について議論する．

キーワード：独立集合遷移，アルゴリズム的メタ定理，グラフパラメータ

1. はじめに

この特集記事では，グラフ上で定義される組合せ遷移問題に対するアルゴリズム理論について紹介する．組合せ遷移問題とは，二つの状態が与えられたときに，小さな変更を繰り返すことによって，ある性質を満たしたまま一つの状態からもう片方の状態へと移れるかを判定する問題である．この枠組で議論される問題は多岐にわたり，たとえば，充足可能性問題 (SAT) [1], 15 パズル [2] とその一般化 [3], グラフ上の種々の問題 [4] などがある．この特集記事でこれらすべてを扱うことはできないので，組合せ遷移で最も盛んに研究されている対象の一つであるグラフ上の問題に限定して紹介することにする．グラフ上の問題は遷移ではない設定とも比較しやすく，組合せ遷移がもつ独特なアルゴリズム的性質の紹介に適している．そのほかの問題に関しては，van den Heuvel [5] と Nishimura [6] の概説論文がくわしい．また，伊藤 [7] によるビデオ講座は，広い話題をカバーしており大変わかりやすいのでおすすめしたい．

1.1 グラフ上の遷移問題

まず，この記事で扱う問題を明確にする．グラフ上の問題は多種多様で，対応する遷移問題も実にさまざまなものが研究されている．そこで，これ以降は以下で定義される**頂点集合遷移問題**のみを扱うことにする．

問題　頂点集合遷移問題（性質 $\mathcal{P}$，遷移ルール $\mathcal{Q}$）

入力　グラフ $G = (V, E)$，性質 $\mathcal{P}$ を満たす二つの頂点集合 $S, S' \subseteq V$.

質問　S から S' へ，性質 $\mathcal{P}$ を保ったまま，遷移ルール $\mathcal{Q}$ にしたがって遷移できるか？

ここで，性質 $\mathcal{P}$ はグラフ G と各頂点集合 $X \subseteq V$ に対して真偽が決まるものであり，たとえば，支配集合であるかどうか（G の各頂点が「X の要素である，または，X の要素の隣接点である」を満たすか）などを表す．遷移ルール $\mathcal{Q}$ はグラフ G および二つの頂点集合 $X, X' \subseteq V$ に対して真偽が決まるものであり，たとえば，1 頂点の交換で X から X' が得られるかなどを表す．頂点集合遷移問題の「質問」は，頂点集合の列 $\langle S_0, S_1, \ldots, S_\ell \rangle$ で，以下をすべて満たすものがあるか，という意味である：

- $S_0 = S$ かつ $S_\ell = S'$,
- $0 \le i \le \ell$ に対し，$\mathcal{P}(G, S_i)$ が真,
- $0 \le i \le \ell - 1$ に対し，$\mathcal{Q}(G, S_i, S_{i+1})$ が真.

この条件を満たす列を遷移列とよび，ℓ をその遷移列の長さとよぶ.

頂点集合遷移問題としては表現できないグラフ上の遷移問題として，たとえば，彩色遷移問題 [8]，マッチング遷移問題 [4]，パス遷移問題 [9] などがある．

1.2 本記事の構成

2 節では頂点集合遷移問題の中でも最もよく研究されている**独立集合遷移問題**をとりあげ，さまざまな結果を紹介していく．独立集合は，古くから盛んに研究されているグラフ上の構造である．ある意味で最も簡単な構造であり，応用上の重要性も高い．独立集合遷移は，互いに干渉しないようにグラフ上を動き回るエージェントの動きを考える問題ともとらえることができる．

3 節ではさまざまな設定の頂点集合遷移問題をまとめて扱えるアルゴリズム的メタ定理を紹介する．解の性質 $\mathcal{P}$ と遷移ルール $\mathcal{Q}$ がある条件を満たし，かつ，入力グラフがなんらかの「良い構造」をもつとき問題が容易になる（または効率的アルゴリズムが自動生成できる）というのがアルゴリズム的メタ定理であり，遷移ではない設定では多くの既存研究がある．組合せ遷移の研究では，この既存のアルゴリズム的メタ定理をうまく遷移の設定に適用する試みが行われ，ある程度うまくいっている．ただ，その適用の過程である意味での

おおたち　ようた
名古屋大学大学院情報学研究科
〒 464–8601 愛知県名古屋市千種区不老町
otachi@nagoya-u.jp

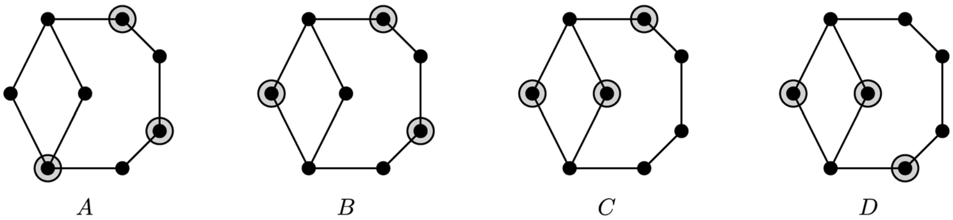

図 1　独立集合遷移 (TJ) の例
大きめの円でトークン（独立集合の要素）を表している．

「遷移問題らしさ」が失われている面もあるため，その後も研究が続いている．それぞれについて紹介する．

最後の 4 節では，未解決問題などに簡単にふれる．

本記事内で必要になる場合のみ用語に定義を与え，それ以外は未定義のまま用いて参考文献をあげることにする．

2.　独立集合遷移問題に関するさまざまな結果

2.1　独立集合と遷移ルール

グラフ $G = (V, E)$ において，頂点集合 $S \subseteq V$ が G において隣接する 2 頂点を含まないとき，S を**独立集合** (independent set) とよぶ[1]．図 1 にグラフと独立集合の例をいくつか示した．グラフ G と整数 k が与えられたとき G が要素数 k 以上の独立集合を含むか否かを判定する**最大独立集合問題**は，初期に NP 完全性が示された問題の一つであり [10]，その計算量は盛んに研究されてきた．

頂点集合 X と X' が，$|X \setminus X'| = |X' \setminus X| = 1$ の関係を満たすとき，つまり，X' が X からある 1 頂点を削除した後に別のある 1 頂点を追加して得られるとき，X から X' への変化を**トークンジャンピング** (TJ) であるという．X から X' への変化が TJ であり，さらに，交換された 2 頂点が隣接しているとき，この変化を**トークンスライディング** (TS) であるという．TJ と TS は独立集合遷移問題の遷移ルールとしてよく研究されている．これらの遷移ルールの名前は，ある頂点が集合に含まれていることをその頂点の上にトークンを載せている状態に見立て，頂点集合の変化をトークンが別の頂点へとジャンプしたり，辺にそってスライドしたりする様子としてとらえたところからきている．

ここで図 1 を見てみると，A から B への変化は TS であり（よって TJ でもあり），B から C へは TJ，C から D へも TJ であるということがわかる．したがって，$\langle A, B, C, D\rangle$ は，遷移ルール TJ のもとでの独立集合遷移列である．一方，少し観察すると，遷移ルール TS のもとでは A から D への遷移が存在しないこともわかる．

遷移ルール TJ と TS のもとでの独立集合遷移問題では，入力される二つの独立集合は同じサイズであると仮定する（そうでない場合は，遷移不能である）．

2.2　独立集合遷移問題の計算量

独立集合遷移問題と最大独立集合問題の計算量は，ある意味似ているととらえられる点はあるものの，全体的に大きく違っているという印象である．

一般の場合，つまり入力グラフを全く制限しない場合，最大独立集合問題は NP 完全だが，独立集合遷移問題はどうなるだろうか．実は，遷移ルールが TJ であっても [11]，TS であっても [3]，独立集合遷移問題は PSPACE 完全である[2]．これは，もし $\mathrm{NP} \subsetneq \mathrm{PSPACE}$ であれば，遷移可能であることの短い証拠を示す方法が存在しないということになる．実際，入力サイズの指数長の遷移列しかもたない例も知られている [12][3]．

入力グラフに何らかの制限を加えた場合はどうだろうか．最大独立集合が多項式時間で解ける場合として有名なのは，入力グラフを理想グラフ (perfect graph) に制限した場合 [13] や，入力グラフの構造の複雑さを表すあるパラメータが小さい場合 [14] などである．残念ながらそれらの制限のもとでも，独立集合遷移問題は（TJ でも TS でも）PSPACE 完全であることが示されている [11, 15]．では，どれだけ制限を強めれば効率的に解ける場合が見つかるのだろうか．

理想グラフの代表的な例として，二部グラフと弦グラフがある．これらに限定すると，独立集合遷移問題が一般の場合より簡単になる場合がある．興味深いこ

[1] 安定集合 (stable set) とよぶこともある．

[2] PSPACE は入力サイズの多項式領域 (polynomial space) で解ける問題のクラスである．NP を含むことが知られているが，両者が一致するかどうかはわかっていない．

[3] ただし，ほかの方法で短い証拠を示せるかもしれないので，これだけでは独立集合遷移問題が NP に属さないということは意味しない．

とに，遷移ルールが TJ か TS かでその難しさに違いがある場合もでてくる．

二部グラフ (bipartite graph) とは，頂点集合を二つの独立集合に分割できるグラフである．一般の場合の独立集合遷移問題の計算量が判明した後も，しばらくは二部グラフに限定した場合の計算量がわかっていなかった．この問題は Lokshtanov and Mouawad [16] によって解決したが，その結果は驚くべきものであった．彼らは，TS の場合は PSPACE 完全であり，TJ の場合は NP 完全であることを示した．二つの遷移ルールで大きく計算量が変わる点も興味深いが，何より驚きなのは独立集合遷移問題が NP 完全になる場合があるということである．筆者が知る限り，彼らの結果以降もそのような場合は新たには見つかっていない．

弦グラフ (chordal graph) とは，長さ 4 以上の誘導サイクル[4]をもたないグラフである．グラフ構造パラメータの木幅と強い関連があるグラフであり，また，木，区間グラフ (interval graph)，スプリットグラフ (split graph) などを一般化するものである．弦グラフでの最大独立集合問題は，ある種の貪欲法で簡単に解ける．独立集合遷移問題に関しては，TJ か TS で計算量が大きく変わる．まず TJ の場合，どんなときでも遷移できることが示された [11]．つまり，自明な正例しか存在しないということで，もちろんこれは問題が多項式時間で解けることを意味する．この結果は実際にはより大きなグラフクラスに関するものであり，見事な議論で鮮やかに証明されている．その鮮やかさを伝えるため，2.3 節で詳細に述べる．遷移ルールが TS の場合はしばらく未解決であったが，結局，さらにスプリットグラフに限定しても PSPACE 完全であることが示された [17]．遷移ルールが TJ のときは自明である一方，TS のときは一般の場合と同じ難しさとなる興味深い例である．弦グラフのほかの特殊ケースである木 [18] や区間グラフ [19, 20] に対しては，TS の場合でも多項式時間で解けることがわかっている．それらの場合に対して最大独立集合は非常に簡単な方法で発見できるが，独立集合遷移問題のための解法はかなり複雑なものとなっている．

グラフクラスの制限以外では，**固定パラメータ計算量**についての研究も行われている．入力サイズ n 以外に何かもう一つのパラメータ k を導入し，$f(k) \cdot n^{O(1)}$ 時間アルゴリズムを設計できるか否かを考える設定である．ここで，k の関数 f は多項式でなくてもよく，2^k や 2^{2^k} など，なんでもよい[5]．このようなアルゴリズムが存在する場合，その問題はパラメータ k に関して**固定パラメータ容易** (fixed-parameter tractable, FPT) であるという．独立集合遷移問題では遷移する独立集合のサイズをパラメータ（の一部）とした場合がよく研究されている．この場合，遷移ルールが TJ の場合は非常に多くのクラスに対して固定パラメータ容易性が示されている一方，TS の場合には一部の場合の固定パラメータ容易性が判明しつつある段階である [21]．

2.3 偶数長の誘導サイクルがない場合の TJ

ここでは偶数長の誘導サイクルをもたないグラフに対して，TJ ルールのもとでの独立集合遷移問題は遷移可能な例しかもたないことの証明を紹介する．このグラフクラスは弦グラフなど多くの重要なグラフクラスを含む．

定理 1 (Kamiński et al. [11])**.** 偶数長の誘導サイクルをもたないグラフ G と，G の独立集合 X, Y ($|X| = |Y|$) を，TJ ルールのもとでの独立集合遷移問題の入力とする．このとき，X から Y への長さ $|X \setminus Y|$ の遷移列が存在する．

証明. 差のサイズ $|X \setminus Y|$ に関する帰納法で証明する．まず，$|X \setminus Y| = 0$ のとき，$|X| = |Y|$ より $X = Y$ であるので，$\langle X \rangle$ が X から Y への長さ 0 の遷移列である．以下では，$|X \setminus Y| = \ell\ (\geq 1)$ とし，独立集合の差のサイズが ℓ より真に小さい場合は定理の主張が満たされると仮定する．

対称差 $(X \setminus Y) \cup (Y \setminus X)$ によって誘導される G の部分グラフを H とする．つまり，$H = G[(X \setminus Y) \cup (Y \setminus X)]$ とする．このグラフ H の頂点集合は二つの独立集合 $X \setminus Y$ と $Y \setminus X$ に分割できる．したがって，H は二部グラフである．

ここで，H がサイクルを含むと仮定してみる．サイクル C を H が含む最短サイクルとする．最短性より C は H の誘導サイクルである．さらに，H は G の誘導部分グラフなので，C は G に含まれる誘導サイクルでもある．サイクル C は二部グラフ H が含むサイクルなのでその長さは偶数長であるが，これは G が偶

[4] 相異なる頂点の列 $C = \langle v_1, v_2, \ldots, v_\ell \rangle$ がグラフ $G = (V, E)$ の含む**サイクル**であるとは，$1 \leq i \leq \ell - 1$ に対して $\{v_i, v_{i+1}\} \in E$ であり，$\{v_\ell, v_1\} \in E$ であることをいう．これら以外に，C の頂点同士を結ぶ辺がないとき，C を誘導サイクルという．サイクル C の長さは ℓ である．

[5] 計算量クラスの定義においては，計算可能な関数 f のみを許す場合が多い．

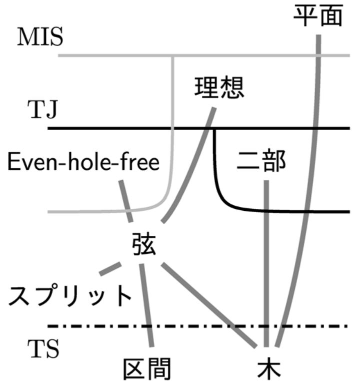

図 2　独立集合遷移問題の計算量概観
グラフクラス間の線は，下のクラス $\subseteq$ 上のクラス という包含関係を表す．

数長の誘導サイクルをもたないことに矛盾する．したがって，H はサイクルを含まないグラフ，森である．

森 H において次数 1 以下の頂点を任意に選び，u とする．対称性より $u \in X \setminus Y$ と仮定できる．次に，頂点 $v \in Y \setminus X$ を以下のとおり選ぶ．もし，u の次数が 1 であれば，v を u の唯一の隣接点とする．そうでなければ，u の次数が 0 であるが，このときは v を $Y \setminus X$ から任意に選ぶ．ここで，Y' を Y から v を削除し u を加えたものとする（つまり，$Y' = (Y \setminus \{v\}) \cup \{u\}$）．

集合 Y' が独立集合であることを示す．集合 Y は独立集合なので，u が $Y \setminus \{v\}$ に隣接点をもたないことを示せばよい．まず，u は X の要素なので $X \cap Y$ に含まれる頂点とは隣接しない．また，u と v の定義より，u が $Y \setminus X$ にもちうる隣接点は v のみである．したがって，u は $Y \setminus \{v\}$ に隣接点をもたない．

集合 X と Y' の差のサイズは $|X \setminus Y'| = |X \setminus Y| - 1 = \ell - 1$ であるので，帰納法の仮定から X から Y' への長さ $\ell - 1$ の遷移列 $\langle S_0, \ldots, S_{\ell-1} \rangle$ ($S_0 = X$, $S_{\ell-1} = Y'$) が存在する．集合 Y' から Y への変化は TJ なので，$S_\ell = Y$ としたとき，$\langle S_0, \ldots, S_{\ell-1}, S_\ell \rangle$ が X から Y への長さ ℓ の遷移列となる． □

2.4　本節のまとめ

ここまで紹介した独立集合遷移問題についての結果を図 2 にまとめる．

文字数の都合により，「偶数長の誘導サイクルをもたないグラフ」は英名の「Even-hole-free」で表した．また，平面的グラフについては紹介していなかったが，TJ でも TS でも PSPACE 完全であることが知られている [11]．図中の MIS は最大独立集合問題を表し，対応する線の上にあるクラスでは NP 完全であり，下にあるクラスでは多項式時間で解け，間にあるクラス (Even-hole-free) では不明であることを表す．TS および TJ では，対応する線の上にあるクラスでは PSPACE 完全であり，下にあるクラスでは多項式時間で解け，間にあるクラス（二部グラフで TJ の場合）では NP 完全であることを表す．

この図を見ると，最大独立集合問題と独立集合遷移問題の計算量について，また，TJ と TS の計算量について，何らかの傾向がありそうな気はしてくるものの，確かなことはまだ何もいえていない．またこの図に含まれていない計算量が不明なクラスも多数あり，さらなる研究が必要である．

3.　遷移問題に対するアルゴリズム的メタ定理

アルゴリズム的メタ定理とは，一つの定理でたくさんの問題に効率的アルゴリズムを与えるものである．個々の問題に対してアルゴリズム理論の研究が進むと，計算量的に容易な問題に共通点が見えてくることがある．それを定理の形にうまくまとめたものがアルゴリズム的メタ定理であり，さまざまな設定で研究されている [22]．

この節では頂点集合遷移問題に対するアルゴリズム的メタ定理を紹介する．はじめに，遷移問題ではなく探索問題に対するあるアルゴリズム的メタ定理を紹介する．つぎに，それがいかに遷移問題に使われたかを説明する．最後に，探索問題に対するアルゴリズム的メタ定理を使わない別の方法を簡単に紹介する．

3.1　探索問題に対するアルゴリズム的メタ定理

ここでは木構造をもつグラフ上での頂点集合探索問題に関してもっとも有名なアルゴリズム的メタ定理（Courcelle の定理とよばれることが多いもの）を紹介する．頂点集合探索問題とは，おおざっぱには以下のような形をした問題である．

問題　頂点集合探索問題（性質 $\mathcal{P}$）

入力　グラフ $G = (V, E)$，整数 k.

質問　性質 $\mathcal{P}$ を満たす頂点集合 $S \subseteq V$ で，サイズ k 以上のものはあるか？

問題によっては，質問の「k 以上」は「k 以下」となる場合もある．たとえば，最大独立集合問題は頂点集合探索問題の一種である．

頂点集合探索問題を木（または森）について解くことを考えてみる．最大独立集合問題ならば，次数 1 以下の任意の頂点を採用しその頂点と隣接点をすべて削除する，という操作を繰り返せばよい．選ばれた頂点をすべて集めるとその木がもちうる最大の独立集合となることが証明できるので，そのサイズが k 以上か確

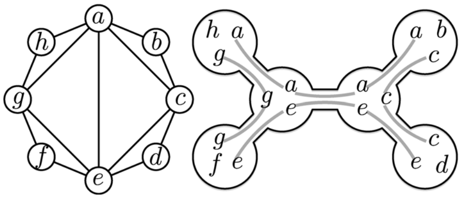

図 3　グラフの木分解

認するだけでよい．ほかにもさまざまな頂点集合探索問題を木に対して考えてみると，その多くが簡単であることがわかる．最小の支配集合を発見する問題に対する効率的アルゴリズム設計などはよい演習である．

木に対する頂点集合探索問題を簡単にするのは何か，それを一般化することはできるか，という疑問を突き詰めていった結果として以下のアルゴリズム的メタ定理が発見された．

定理 2（Courcelle [23, 24], Borie et al. [25]）**．** 木幅 k 以下のグラフ G と MSO_2 式 φ が与えられたとき G が φ を満たすかどうか判定する問題は，$|\varphi|+k$ をパラメータとして固定パラメータ容易である．

この定理を理解するには，木幅と MSO_2 式について知る必要があるが，詳細な定義をせずに簡単な紹介に留めることにする．

木幅は木分解をもとに定義される．グラフの木分解は，グラフの木への埋め込みであり，隣接関係を失わないように各頂点を部分木に埋め込んだものである（図 3 参照）．うまく埋め込んだときのある意味での「太さ」をそのグラフの**木幅**という（正確な定義は文献 [26] を参照）．木幅が小さいグラフはある意味で木に近いといえるので，木に対するボトムアップ型動的計画法をうまく一般化して適用することができることが多い．木幅の概念は木だけでなく直並列グラフ [27] などにも一般化できることが知られている．

グラフ上の MSO_1（単項二階論理，monadic second-order logic）では，以下の要素を組合せて式を作ることができる．

- 頂点，頂点集合を表す変数：$v_1, v_2, \ldots, V_1, V_2, \ldots$.
- 変数に対する量化：$\exists v$, $\forall v$, $\exists X$, $\forall X$.
- 否定，論理和，論理積：$\neg\varphi$, $\varphi \vee \psi$, $\varphi \wedge \psi$.
- 等号，帰属関係：$u = v$, $v \in X$.
- 隣接関係：$E(u, v)$.

さらに，辺や辺集合を扱えるようにしたものを MSO_2 とよぶ．たとえば，以下の式 $\varphi(X)$ は，「X は独立集合である」を表す MSO_1 式である．

$$\varphi(X) := \neg(\exists u \exists v (u \in X \wedge v \in X \wedge E(u, v))).$$

ほかにもさまざまな性質を MSO_1 で記述できる．たとえば，グラフが連結であるという性質を書くことができるし，MSO_2 を使えばグラフがハミルトンサイクルをもつということも記述できる．さらに，Arnborg et al. [28] の拡張により，$\varphi(X)$ を満たす最大・最小の頂点集合を発見するという問題も同じ計算量で解けることがわかっている．このアルゴリズム的メタ定理は非常に強力で，たとえば上述の 1 行の MSO_1 式（とその正当性）を示すだけで，最大独立集合問題は木幅をパラメータとして固定パラメータ容易であることが証明できる．

定理 2 のようなアルゴリズム的メタ定理には，扱える問題の範囲 (MSO_2) と扱えるグラフクラスの範囲（木幅限定）の間にトレードオフのようなものがある．実際，扱える問題の範囲を MSO_1 まで狭めることによって，扱えるグラフクラスの範囲を広げることができる．

定理 3（Courcelle et al. [14]）**．** クリーク幅 k 以下のグラフ G と MSO_1 式 φ が与えられたとき G が φ を満たすかどうか判定する問題は，$|\varphi|+k$ をパラメータとして固定パラメータ容易である．

クリーク幅とは，木幅を一般化するグラフパラメータであり，密なグラフに対しても小さくなることがある（クリーク幅の定義は 文献 [14] を参照）．

3.2　遷移問題に対するメタ定理

Mouawad et al. [29] は定理 2 を遷移問題に適用する見事な方法を発見した．

定理 4（Mouawad et al. [29]）**．** TJ による頂点集合遷移問題は，性質 $\mathcal{P}$ がある MSO_2 式 φ で表せるとき，$|\varphi|$ + 木幅 k + 遷移長 ℓ をパラメータとして固定パラメータ容易である．

遷移長とは，遷移列に許す長さの上限である．つまり，この定理では長さ高々 ℓ の遷移列が存在するか，という少し変化した問題を扱っている．この定理は非常に簡潔な証明をもつ．それは，遷移問題を以下のような一つの MSO_2 式で書いてしまうというものである．

$$\Phi(X,X') \coloneqq \exists X_0 \exists X_1 \ldots \exists X_\ell \\ (X_0 = X) \wedge (X_\ell = X') \\ \wedge \bigwedge_{0\le i\le \ell} \varphi(X_i) \wedge \bigwedge_{0\le i<\ell} \mathrm{TJ}_{=}(X_i, X_{i+1}).$$

ここで，$\mathrm{TJ}_{=}(X_i, X_{i+1})$ は X_i から X_{i+1} の変化が TJ であるか，または，$X_i = X_{i+1}$ であるということを意味する式で，これが MSO_2 で表現できることは容易に確認できる．この式 $\Phi(X,X')$ が遷移長 ℓ 以下の頂点集合遷移問題を正しく表していることと，定理 2 より，定理 4 がただちに導かれる．

この仕組みはとても柔軟で，たとえば TJ の代わりに TS を用いることもできるし，もっと複雑な遷移ルールでも MSO_2 や MSO_1 で記述できるものならばなんでも使うことができる．また，定理 2 の代わりに定理 3 を用いることで，定理 4 中の MSO_2 を MSO_1 にして木幅をクリーク幅にした別の定理を得ることもできる．

遷移長をパラメータとするとこのような一般的な定理が証明できるが，そうでない場合には木幅などが小さくても問題が簡単にならないことが知られている．バンド幅というパラメータは木幅のある意味での上界となるものであるが[6]， Wrochna [15] はバンド幅がある定数以下のグラフに対しても，独立集合遷移問題が PSPACE 完全であることを示した．

以上の結果をあわせて考えると，頂点集合遷移問題に対するアルゴリズム的メタ定理を作るには，遷移長をパラメータに入れるしかないような気がしてくる．一方，頂点集合遷移問題の難しさ，特に PSPACE 完全性は，遷移長が指数関数的に大きくなりうることに起因するとも考えられ，遷移長を限定した問題はある意味で「遷移問題らしさ」を失っているといえるかもしれない．そこで，次の 3.3 節では，遷移長を限定しない場合に関するアルゴリズム的メタ定理設計の試みについて紹介する．

3.3　遷移問題に対する新たなメタ定理

最近，Gima et al. [30] によって遷移長を限定しない設定での頂点集合遷移問題に対するアルゴリズム的メタ定理が示された．

定理 5 (Gima et al. [30])**.** TJ による頂点集合遷移問題は，性質 $\mathcal{P}$ がある MSO_1 式 φ で表せるとき，$|\varphi|$ + 近傍多様性 k をパラメータとして固定パラメータ容易である．

[6] すべてのグラフに対して，木幅 $\le 2\cdot$ バンド幅 である．

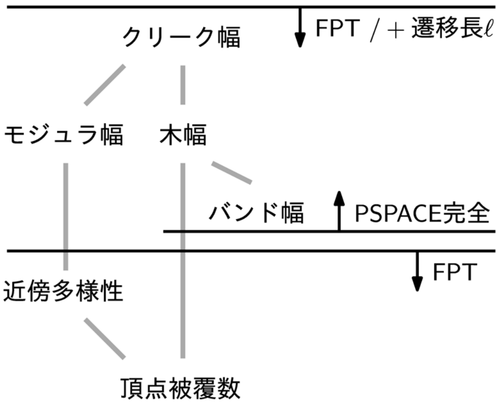

図 4　グラフパラメータとアルゴリズム的メタ定理
パラメータ間の線は，下のパラメータが定数であれば上も定数である，という関係を表す．

グラフ $G=(V,E)$ が含む 2 頂点 u,v の近傍が等しいとき，u,v は双子であるという．グラフ G の近傍多様性 (neighborhood diversity) とは，頂点集合 V を k 個の双子集合に分割できる最小の k のことである．たとえば，完全グラフの近傍多様性は 1 であり，完全二部グラフの近傍多様性は 2 である．また，頂点被覆数 (vertex cover number) が k のグラフは，近傍多様性が高々 $2^k + k$ であることも証明できる．

Gima et al. [30] は，Lampis [31] が示した近傍多様性と MSO_1 式の関係を用い，遷移列に現れうる頂点集合をある意味での同値類に分けることで定理 5 を証明した．遷移長を限定しないという意味で「遷移らしさ」をとらえたアルゴリズム的メタ定理ということができるかもしれないが，定理 5 の副産物として，この場合の遷移列は入力サイズのある多項式長になることはあるが，指数長になることはないことも示すことができる．

3.4　本節のまとめ

本節で紹介した頂点集合遷移問題についての結果を図 4 にまとめる．遷移長をパラメータに入れない場合の固定パラメータ容易性はかなり限定された範囲についてしかわかっていない．

図中のモジュラ幅は，近傍多様性の一般化でありクリーク幅の特殊化である．モジュラ幅が小さいとき独立集合遷移問題は容易であることがわかっているが [32]，定理 5 をモジュラ幅を扱えるまで一般化できるかどうかはわかっていない．

4.　おわりに

本記事では頂点集合遷移問題についてのさまざまな

結果を紹介したが，独立集合遷移問題に限定したとしてもまだまだわかっていないことは多い．

たとえば，木幅が 2 に限定されたクラスは直並列グラフを含む重要なクラスであるが，独立集合遷移問題がこのクラスに対して多項式時間で解けるかわかっていない．木幅が 1 のときは多項式時間で解けることがわかっており [18]，一方，木幅がある大きな定数以下でも PSPACE 完全であることがわかっているが [15]，その間には大きなギャップが残っている．

遷移ルール TS と TJ の関係についても，TJ のときにできることをどれくらい TS のときに適用できるかなど，より深い理解が必要である．独立集合遷移問題に対しては TS ルールに関する新たな技術が発展しつつあるが，遷移する集合のサイズがパラメータとして必要という制限があるものである [33]．

参考文献

[1] P. Gopalan, P. G. Kolaitis, E. N. Maneva and C. H. Papadimitriou, "The connectivity of boolean satisfiability: Computational and structural dichotomies," *SIAM Journal on Computing*, **38**, pp. 2330–2355, 2009.

[2] D. Ratner and M. K. Warmuth, "The (n^2-1)-puzzle and related relocation problems," *Journal of Symbolic Computation*, **10**, pp. 111–138, 1990.

[3] R. A. Hearn and E. D. Demaine, "PSPACE-completeness of sliding-block puzzles and other problems through the nondeterministic constraint logic model of computation," *Theoretical Computer Science*, **343**, pp. 72–96, 2005.

[4] T. Ito, E. D. Demaine, N. J. A. Harvey, C. H. Papadimitriou, M. Sideri, R. Uehara and Y. Uno, "On the complexity of reconfiguration problems." *Theoretical Computer Science*, **412**, pp. 1054–1065, 2011.

[5] J. van den Heuvel, "The complexity of change," *Surveys in Combinatorics 2013 (volume 409 of London Mathematical Society Lecture Note Series)*, S. R. Blackburn, S. Gerke and M. Wildon (eds.), Cambridge University Press, pp. 127–160, 2013.

[6] N. Nishimura, "Introduction to reconfiguration," *Algorithms*, **11**(4), 52, 2018.

[7] 伊藤健洋.「組合せ遷移の基礎講座」, https://youtube.com/playlist?list=PLSlf7cb0s268ysb-XhBcVt_CIS0D11Blq（2023 年 3 月 23 日閲覧）

[8] L. Cereceda, J. van den Heuvel and M. Johnson, "Mixing 3-colourings in bipartite graphs," *European Journal of Combinatorics*, **30**, pp. 1593–1606, 2009.

[9] E. D. Demaine, D. Eppstein, A. Hesterberg, K. Jain, A. Lubiw, R. Uehara and Y. Uno, "Reconfiguring undirected paths," *Algorithms and Data Structures (16th International Symposium, WADS 2019)*, Z. Friggstad, J. Sack and M. R. Salavatipour (eds.), Springer, pp. 353–365, 2019.

[10] R. M. Karp, "Reducibility among combinatorial problems," *Complexity of Computer Computations (The IBM Research Symposia Series)*, R. E. Miller, J. W. Thatcher and J. D. Bohlinger (eds.), Springer, pp. 85–103, 1972.

[11] M. Kamiński, P. Medvedev and M. Milanič, "Complexity of independent set reconfigurability problems," *Theoretical Computer Science*, **439**, pp. 9–15, 2012.

[12] M. Kamiński, P. Medvedev and M. Milanič. "Shortest paths between shortest paths," *Theoretical Computer Science*, **412**, pp. 5205–5210, 2011.

[13] M. Grötschel, L. Lovász and A. Schrijver, "Polynomial algorithms for perfect graphs," *North-Holland Mathematics Studies*, **88**, pp. 325–356. 1984.

[14] B. Courcelle, J. A. Makowsky and U. Rotics, "Linear time solvable optimization problems on graphs of bounded clique-width," *Theory of Computing Systems*, **33**, pp. 125–150, 2000.

[15] M. Wrochna, "Reconfiguration in bounded bandwidth and tree-depth," *Journal of Computer and System Sciences*, **93**, pp. 1–10, 2018.

[16] D. Lokshtanov and A. E. Mouawad, "The complexity of independent set reconfiguration on bipartite graphs," *ACM Transactions on Algorithms*, **15**, pp. 7:1–7:19, 2019.

[17] R. Belmonte, E. J. Kim, M. Lampis, V. Mitsou, Y. Otachi and F. Sikora, "Token sliding on split graphs," *Theory of Computing Systems*, **65** pp. 662–686, 2021.

[18] E. D. Demaine, M. L. Demaine, E. Fox-Epstein, D. A. Hoang, T. Ito, H. Ono, Y. Otachi, R. Uehara and T. Yamada, "Linear-time algorithm for sliding tokens on trees," *Theoretical Computer Science*, **600**, pp. 132–142, 2015.

[19] M. Bonamy and N. Bousquet, "Token sliding on chordal graphs," *Graph-Theoretic Concepts in Computer Science (43rd International Workshop, WG 2017)*, H. L. Bodlaender and G. J. Woeginger (eds.), pp. 127–139, Springer, 2017.

[20] M. Brianski, S. Felsner, J. Hodor and P. Micek, "Reconfiguring independent sets on interval graphs," In *Proceedings of 46th International Symposium on Mathematical Foundations of Computer Science*, pp. 23:1–23:14, 2021.

[21] N. Bousquet, "A. E. Mouawad, N. Nishimura and S. Siebertz, "A survey on the parameterized complexity of the independent set and (connected) dominating set reconfiguration problems," *CoRR*, abs/2204.10526, 2022.

[22] S. Kreutzer, "Algorithmic meta-theorems," *Finite and Algorithmic Model Theory (volume 379 of London Mathematical Society Lecture Note Series)*, J. Esparza, C. Michaux and C. Steinhorn (eds.), Cambridge University Press, pp. 177–270, 2011.

[23] B. Courcelle, "The monadic second-order logic of graphs, I. recognizable sets of finite graphs." *Information and Computation*, **85**, pp. 12–75, 1990.

[24] B. Courcelle, "The monadic second-order logic of graphs III: tree-decompositions, minor and complexity issues," *RAIRO: Theoretical Informatics and Applications*, **26**, pp. 257–286, 1992.

[25] R. B. Borie, R. G. Parker and C. A. Tovey, "Automatic generation of linear-time algorithms from predicate calculus descriptions of problems on recursively constructed graph families," *Algorithmica*, **7**, pp. 555–581, 1992.

[26] H. L. Bodlaender, "A partial k-arboretum of graphs with bounded treewidth," *Theoretical Computer Science*, **209**(1-2), pp. 1–45, 1998.

[27] K. Takamizawa, T. Nishizeki and N. Saito, "Linear-time computability of combinatorial problems on series-parallel graphs," *Journal of Computer and System Sciences*, **29**, pp. 623–641, 1982.

[28] S. Arnborg, J. Lagergren and D. Seese, "Easy problems for tree-decomposable graphs," *Journal of Algorithms*, **12**, pp. 308–340, 1991.

[29] A. E. Mouawad, N. Nishimura, V. Raman and M. Wrochna, "Reconfiguration over tree decompositions," *Parameterized and Exact Computation (9th International Symposium, IPEC 2014)*, M. Cygan and P. Heggernes (eds.), Springer, pp. 246–257, 2014.

[30] T. Gima, T. Ito, Y. Kobayashi and Y. Otachi, "Algorithmic meta-theorems for combinatorial reconfiguration revisited," In *Proceedings of the 30th Annual European Symposium on Algorithms (ESA 2022)*, pp. 61:1–61:15, 2022.

[31] M. Lampis, "Algorithmic meta-theorems for restrictions of treewidth," *Algorithmica*, **64**, pp. 19–37, 2012.

[32] R. Belmonte, T. Hanaka, M. Lampis, H. Ono and Y. Otachi. "Independent set reconfiguration parameterized by modular-width," *Algorithmica*, **82**, pp. 2586–2605, 2020.

[33] V. Bartier, N. Bousquet and A. E. Mouawad, "Galactic token sliding," In *Proceedings of the 30th Annual European Symposium on Algorithms (ESA 2022)*, pp. 15:1–15:14, 2022.

