

# 組合せ遷移に関する最近の研究

伊藤 健洋

本稿では、近年盛んに研究されている組合せ遷移の枠組を導入し、その概念が理論から産業応用にまで現れていることを紹介する。そして、筆者を領域代表とした科学研究費助成事業・学術変革領域研究 (B)「組合せ遷移の展開に向けた計算機科学・工学・数学によるアプローチの融合」(2020 年度~2022 年度)における研究成果を中心に、組合せ遷移研究の最近の様子をお伝えしたい。

キーワード：組合せ遷移, アルゴリズム, 学術変革領域研究

## 1. はじめに

組合せ遷移とは、「状態空間上での遷り変わり」を数理モデル化し解析する新しいアルゴリズム理論であり、2008 年に筆者らが提唱した [1]。(なお、文献 [1] は 2011 年発行の学術雑誌論文であるが、国際会議では 2008 年に発表している)。その後、特にグラフ上で定義されるさまざまな組合せ遷移問題 (たとえば、グラフの独立集合やマッチングなどに関する遷移問題) が研究され、世界的な新しい研究潮流を生んでいる。研究が進むにつれ、組合せ遷移の概念が理論から産業応用まで多種多様な分野に現れることがわかり、今ではアルゴリズム理論の枠には収まりきれない研究事例が多数観測されている。

ここでは、筆者らが組合せ遷移の研究を開始するきっかけとなった電力の配電制御を例に挙げて、その概念を導入しよう。配電網は事故時の停電区間を小さく抑え込むため、複数の経路から電力が供給できるように構成されている。たとえば、配電網の日本標準モデルとして広く利用されているベンチマークデータ [2] には、約  $10^{58}$  通りという膨大な供給経路の選択肢が存在する。この中から、最適な供給経路を算出するだけでも十分難しい。しかし、たとえ最適な供給経路が算出できても、常時稼働型システム特有の課題も生じる。すなわち、既にシステムは稼働して電力供給を行っており、たとえ最適な状態へ切り替えるためとはいえ、その切替途中で停電を起こすわけにはいかないのである。現状の供給経路から最適なものへと一気に切り替えられればいいのだが、電気的な制約から切替操作にも規則がある。したがって、配電制御では、約  $10^{58}$  通

りの供給経路からなる状態空間において、

- 停電を起こすことなく (各種制約を満たした実行可能な状態を維持したまま)、
- 規則に従った切替操作を繰り返すことで、

現状の供給経路から最適なものへと変更することが要求される。このように「状態空間上での遷り変わり」を対象とするアルゴリズム研究が「組合せ遷移」である。

組合せ遷移は、研究・実務の広範な分野に現れ、実際に分野をまたがる横断研究の事例も出てきた。そこで、組合せ遷移をより体系的に研究するため、われわれは 2020 年度に新設された科学研究費助成事業・学術変革領域研究 (B) に応募し、有難いことに採択された [3]。研究領域の課題名は「組合せ遷移の展開に向けた計算機科学・工学・数学によるアプローチの融合」であり、以降簡単のために領域略称を用いて、学変 (B)「組合せ遷移」と記す。研究期間は 3 年度間だが、新設の 2020 年度は 10 月に採択発表があったため、実質 2.5 年間の研究プロジェクトであった。

本稿では、組合せ遷移の枠組を導入しつつ、われわれの研究プロジェクトが行ってきた研究について紹介する。研究成果の具体的な内容などについては、本特集のほかの著者陣にお任せするものとし、ここでは研究プロジェクト全体での位置づけを中心に解説していきたい。これらを通して、組合せ遷移に関する研究の最近の様子を感じていただければ幸いである。

## 2. 組合せ遷移の枠組

組合せ遷移は、新しいアルゴリズム理論であり、その領域は未だ発展・拡大中である。特に、学変 (B)「組合せ遷移」での研究活動によって、さまざまな新しい形の組合せ遷移研究が観測され始めている。ここでは、筆者らが 2008 年より取り組んできた組合せ遷移の基本的な枠組を紹介するが、組合せ遷移の領域をこれに限定するものではないことは強調したい。

いとう たけひろ  
 東北大学大学院情報科学研究科  
 〒 980-8579 仙台市青葉区荒巻字青葉 6-3-09  
 takehiro@tohoku.ac.jp

## 2.1 解空間グラフ

組合せ遷移の問題を定義するためには、対象とする状態空間を定めることが重要である。状態は、台集合  $U$  とその部分集合上で定義される性質  $\pi$  を固定することで定義される。  $U$  の部分集合  $S$  が性質  $\pi$  を満たすとき、  $S$  は一つの (実行可能な) 状態とみなされる。状態空間は、次のような「解空間グラフ」として定める。各状態をグラフの 1 頂点とし、1 回の変更操作で遷移できる二つの頂点 (状態) を辺で結んだグラフを、**解空間グラフ**と呼ぶ。このような解空間グラフにおいて、到達可能性や連結性を問うのが、組合せ遷移の研究である。具体的な問題の定義は 2.2 節で与える。

グラフのマッチングを例にして、解空間グラフを定義してみよう。グラフ  $G = (V, E)$  の辺集合  $E$  を台集合とみなし、性質  $\pi$  を「どの 2 辺も端点を共有しない」と定義すれば、われわれはグラフ  $G$  の各マッチングを一つの状態とみなす。では、解空間グラフの辺 (すなわち、マッチングの隣接関係) はどう定義すればいいだろうか? マッチングに限らず、解空間グラフの隣接関係には明確な設定ルールがない。配電制御のように何か具体的な応用や動機がある場合には、それを隣接関係として設定している。明確な動機がない場合には、最も小さな変化を隣接関係にすることが多い。たとえば、文献 [1] では、  $G$  の二つのマッチング  $M$  と  $M'$  が隣接することは、それらの対称差  $M \Delta M' = (M \setminus M') \cup (M' \setminus M)$  がサイズ 1 であると定義した。すなわち、状態を表す部分集合に対して一つだけ要素の変更を行う ( $M$  が  $M'$  から辺を 1 本だけ追加または削除して得られる) 場合に、隣接すると定義している。マッチングにおける隣接関係は、これに限られるものではない。たとえば、マッチング多面体を動機とする研究であれば、  $M \Delta M'$  が  $G$  の一つのパスまたはサイクルを誘導するとき、  $M$  と  $M'$  が隣接すると定義するであろう [4]。どちらの隣接関係が正しいということではない。ただもちろん、隣接関係の定義は、解空間グラフの構造そのものに影響を与える。

## 2.2 組合せ遷移問題

状態空間を (解空間) グラフで定義したことにより、われわれはそのグラフ上での到達可能性や連結性を議論することができるようになる。これらを扱うのが組合せ遷移の問題であり、さまざまな種類がある。

Ito et al. [1] が 2008 年に提案し、現在最もよく研究されている組合せ遷移問題は**到達性判定問題**と呼ばれる。入力として二つの状態 (すなわち、解空間グラフの 2 頂点) が与えられ、その 2 頂点を繋ぐパスが解

空間グラフにあるかどうか (すなわち、その 2 頂点が解空間グラフの同じ連結成分に含まれるかどうか) 判定する問題である。2 頂点を繋ぐパスが存在するとき、それらは互いに**遷移可能**であるといい、そのパスに対応する状態の系列は**遷移系列**と呼ばれる。ここで注意したいことは、解空間グラフは台集合  $U$  と性質  $\pi$  によって定義されるものであり、解空間グラフそのものは入力ではない。また、到達性判定問題では、二つの状態が入力として与えられるものの、それ以外の部分集合  $S \subseteq U$  が性質  $\pi$  を満たすかどうかはわからない点にも注意しよう。

組合せ遷移では、到達性判定問題のほかにも、さまざまな種類の問題が研究されている。**最短長問題**では、入力として二つの状態が与えられたとき、それらが互いに遷移可能であるかを判定し、遷移系列が存在するときにはその最短の長さを計算したい。**最適化遷移問題**においては、各状態に目的関数値が定められているとする。このとき、入力として一つの状態が与えられ、そこから遷移可能な状態の内 (すなわち、解空間グラフにおいて同じ連結成分に含まれる状態の内)、目的関数値を最適化するものを求めたい。(最適化遷移について詳しくは、本特集の鈴木顕氏の記事も参照されたい)。**連結性判定問題**では、台集合  $U$  と性質  $\pi$  が指定されたとき、その解空間グラフが連結であるかどうか (すなわち、どの二つの状態も互いに遷移可能であるかどうか) を判定したい。

繰り返しになるが、組合せ遷移の研究は、上記の問題に限られるものではない。たとえば、学変 (B)「組合せ遷移」の研究を通して、解空間グラフが有向グラフである場合の研究も進められている。また、局所探索や列挙との関連をご質問いただくことも多い。これらは解空間を探索するアルゴリズム手法であり、確かに組合せ遷移との類似性や親和性は高い。一方で、組合せ遷移では状態の隣接関係が問題として固定されているのに対し、局所探索や列挙では「どのように隣接関係を設計し、解空間グラフをデザインするか?」という点が肝要となる。

組合せ遷移の研究では、アルゴリズムの計算時間を入力サイズに対して評価している。もちろん、どの組合せ遷移問題も解空間グラフを明示的に構成すれば簡単に解けるが、それでは入力サイズに対して指数時間かかってしまう。また、2.3 節でも述べるが、最短の遷移系列でも超多項式長になる例もある。このことから、組合せ遷移の研究では、互いに遷移可能であるかどうかを判定だけ (すなわち、Yes または No のみを

出力) すればよく, 実際の遷移系列の出力までは求めないとしている. また, 判定にかかる計算時間と, 遷移系列の出力にかかる計算時間は, 区別して評価されることが多い. 同様に, 最短長問題の出力は最短長の数字だけでよく, 実際に最短の遷移系列を出力することまでは求められない.

### 2.3 組合せ遷移問題のアルゴリズム研究

組合せ遷移の枠組が提唱されてからしばらくは, 主に計算困難性の解析が中心であった. 特に, 到達性判定問題は, その多くが PSPACE 完全であることが証明されている. 台集合  $U$  に対して性質  $\pi$  を満たす部分集合が一つでも存在するか判定する問題 (以降, 従来型の探索問題と呼ぶ) が NP 完全であるとき, その到達性判定問題は多くの場合 PSPACE 完全であることが示されている. ここでは計算量クラス PSPACE の定義などは省略するが, PSPACE は NP を包含するため, 到達性判定問題が PSPACE 完全であることは次の二つを意味する.

- $P \neq NP$  の仮定の下で, その到達性判定問題は多項式時間で解けない.
- $NP \neq PSPACE$  の仮定の下で, その解空間グラフの直径は, 入力サイズの超多項式になる. すなわち, 最短の遷移系列を選んだとしても, その系列長 (変更操作の回数) が超多項式となるような状態のペアが存在する.

後者は, 仮に解空間グラフの直径が多項式長であれば, 答えが Yes となるときには遷移系列をその証拠とすることができてしまうからである.

これら計算困難性の証明において, 帰着の構成元として重要な役割を果たしている問題が二つある. 一つが Gopalan らが導入した充足可能性問題 (SAT) に関する到達性判定問題 [5] であり, もう一つが Hearn と Demaine が導入した非決定性制約論理 [6] である. 従来型の探索問題の NP 完全性を証明する際には, SAT から始まる帰着の一連の流れがよく知られている [7]. 実は, これら NP 完全性の帰着とはほぼ同じ帰着の構成方法で, 多くの到達性判定問題の PSPACE 完全性が証明できる [1]. したがって, 筆者らが研究を始めたとき, Gopalan らが SAT の到達性判定問題に対して PSPACE 完全性を証明済みであった [5] ことは, 非常に有難かった.

非決定性制約論理は, Gardner が 1964 年にパズルやゲームに関して投げかけた問い [8] に答えるため, その約 40 年後に提唱され, さまざまなスライディングブロックパズルの計算困難性が解析されている. 問題

名に「論理」と付いてはいるが, 実際はグラフの辺の向き付けを反転する到達性判定問題である. したがって, グラフに関連する組合せ遷移の研究でも重要な役割を果たしている. なお, 非決定性制約論理とそのパズル解析への適用は, 一冊の本 [9] にまとめられており, 和訳 [10] も出版されている. また, パズルやゲームの計算量に関する網羅的なサーベイ [11] が Uehara によってまとめられており, そこではパズルやゲームの視点から組合せ遷移も解説されている.

計算容易性の観点からは, 2013 年頃より組合せ遷移問題に対するアルゴリズム開発が急速に進んでいる. アルゴリズム理論を対象に含む著名な国際会議でも, 組合せ遷移に関する論文が続々と発表されるようになった. 詳しくは, Nishimura によるサーベイ [12] や, 問題は限定されるものの Bousquet らによるサーベイ [13] をご覧いただきたい. また, Hoang は組合せ遷移に関連のある論文を網羅的にリスト化しており, Web サイト [14] にて公開している.

## 3. 学変 (B) 「組合せ遷移」

組合せ遷移のアルゴリズム研究が進むにつれ, 組合せ遷移の概念が研究・実務の広範な分野に現れることがわかってきた. 実際には, 配電制御のように分野をまたがる研究事例も出てきた [15]. しかしながら, 組合せ遷移のアルゴリズム技術は, それを研究する専門家だけに留まり, 他分野の研究者や実務家が組合せ遷移の技術に直接アクセスすることは難しい状況であった. 一方で, たとえば機械学習の技術は, 理論・応用を問わず, 分野も超えて急速に浸透し活用されている. ここまで広範な領域で技術が浸透したのは, 専門家の活躍はもちろんだが, Python の充実したライブラリなどソフトウェアによって研究開発の共通基盤が整備されたことも大きい. ほかに, 数式処理であれば Mathematica, 組合せ問題であれば SAT ソルバーや整数計画ソルバーというように, 共通のソフトウェアが整備されている. これにより, 非専門家であっても最先端の技術に容易にアクセスできるようになり, 自領域内での問題解決が可能となっている. このような研究でも実務でも障壁なく, 組合せ遷移のアルゴリズム技術を活用するための共通基盤を構築すべく, われわれは領域研究というスタイルでの研究プロジェクトを立ち上げた. 計算機科学・工学・数学の三分野から集まった研究者が協働することで, 組合せ遷移のアルゴリズム基盤・実装技術基盤・数学基盤の構築を目指すためである. これらの基礎理論を固めていくため, われわれ



れの研究領域では三つの計画研究班が互いに協働しながら研究を進めてきた。

### 3.1 計画研究 A01 班：計算機科学

計算機科学を背景分野とする計画研究 A01 班では、組合せ遷移のアルゴリズム基盤の構築を目指して研究を進めてきた。特に、組合せ遷移に関する「アルゴリズム的メタ定理」を構築できたことは大きい [16]。個々の問題に対してアルゴリズム開発を行っている時、時に「よく似た」アルゴリズムに辿り着くことがある。対象とする問題こそ違うものの、そこで使われる手法が本質的には同じアルゴリズムである。すると反対に「どういう問題であれば、このアルゴリズム手法は有効なのか？」という問いが生まれる。これがアルゴリズム的メタ定理の研究である。これは、研究事例の積み重ねから、アルゴリズム手法を「統一された設計技法」へと昇華する研究ともいえる。本特集の中でも、大舘陽太氏に記事を書いていただいている。

このほかにも、近接分野への組合せ遷移の展開や計画研究班の枠組を超えた融合研究によって、新しいタイプの研究を提唱することもできた。近接分野への組合せ遷移の展開としては、分散計算が一例に挙げられ、全域木の分散遷移問題を解析した [17]。ほかにも、解空間グラフが有向グラフである場合の研究も提唱することができた [18]。

### 3.2 計画研究 B01 班：工学

工学を背景分野とする計画研究 B01 班では、組合せ遷移の実装技術基盤の構築を目指して研究を進めてきた。実際に、研究計画 B01 班では組合せ遷移問題を解くソルバーを開発しており、ゼロサプレス型二分決定グラフ (ZDD) に基づく組合せ遷移ソルバー、有界モデル検査に基づく組合せ遷移ソルバー、SAT ソルバーに基づく組合せ遷移ソルバーという三つのタイプがある。本特集では、川原純氏に ZDD に基づく組合せ遷移ソルバーについて記事を書いていただいている。

計画研究 B01 班では、GUI ビュアー「CoReViewer」も開発した。詳しくは、川原氏の記事をご参照いただきたい。われわれは、開発した組合せ遷移ソルバーをさまざまなシチュエーションで使っていただきたいと考えている。たとえば、筆者自身が使いたいのは、ある問題に対するアルゴリズムを考える際に、小さな例題を解いたり思い付いた反例の候補を検証したり、といった状況である。このような「思い立ったとき」には、手軽に CoReViewer で入力して検証に活用してもらいたい。そして、より本格的な計算機実験が必要なときには、Python インターフェースも公開している

ので、用途に合わせて活用してもらいたい。

さらにわれわれは、組合せ遷移ソルバーを配電制御に活用し、停電の早期復旧のため供給経路の切替手順を算出するアルゴリズムを開発した。切替手順の最短性を理論保証し、大規模停電の復旧に必要な多段融通にも対応できる。詳しくは、本特集の鈴木顕氏の記事をご覧ください。この研究成果については、プレスリリースを配信し [19]、特許も共同出願している。

### 3.3 計画研究 C01 班：数学

数学を背景分野とする計画研究 C01 班では、組合せ遷移の数学基盤の構築を目指して研究を進めてきた。組合せ遷移の問題を解決するために、これまでも数学の諸概念が利用されている。われわれの研究領域での成果を眺めても、さまざまな数学的な視点や道具が使われているが、離散構造・不変量・トポロジーという三つの概念を基にした研究手法に特に進展が見られた。これら数学の諸概念が果たす重要な役割については、本特集では岩政勇仁氏の記事をご覧ください。

このほかにも、グラフの向き付けに関する 1960 年の Nash-Williams の定理 [20] (および 1939 年の Robbins の定理 [21]) に対して、組合せ遷移による新しい証明を与えることに成功した [22]。これは、グラフの向き付けの状態空間に、辺連結度に関連する新たな知見を与えたともいえる。加えて計画研究 C01 班では、組合せ遷移の視点をアルゴリズム的ゲーム理論へ展開した研究も行い [23, 24]、今後のさらなる発展が期待される。

## 4. おわりに

本稿では、組合せ遷移の概念や枠組を導入した後に、学変 (B)「組合せ遷移」での研究成果を概観した。なお、本稿では解説の都合から、計画研究班ごとに研究成果を紹介したが、これはその研究成果が一つの計画研究班から得られたと意味するわけではない。実際には、班間連携によって得られた研究成果も多数含まれていることを強調しておきたい。より詳しくは、本特集の各記事や参考文献をご覧ください。また、2023 年 2 月 21 日に開催した学変 (B)「組合せ遷移」最終報告会の模様 (スライド資料と講演動画) も Web にてご覧いただける [3]。最終報告会では、本稿で挙げたような研究成果をもう少し踏み込んで解説しており、あわせて学変 (B)「組合せ遷移」として行ったさまざまな活動も報告している。

学変 (B)「組合せ遷移」の研究期間は、まさにあっという間であった。そして、常にコロナ禍の影響を受

け続けた 2.5 年間でもあった。そのような状況の下で、全国 10 以上の大学に散らばっている研究領域メンバーが、本稿では紹介しきれないほどの成果を挙げ、新しい組合せ遷移の世界を創りあげてくれたことには感謝してもしきれない。

### 参考文献

- [1] T. Ito, E. D. Demaine, N. J. A. Harvey, C. H. Papadimitriou, M. Sideri, R. Uehara and Y. Uno, “On the complexity of reconfiguration problems,” *Theoretical Computer Science*, **412**, pp. 1054–1065, 2011.
- [2] Y. Hayashi, S. Kawasaki, J. Matsuki, H. Matsuda, S. Sakai, T. Miyazaki and N. Kobayashi, “Establishment of a standard analytical model of distribution network with distributed generators and development of multi evaluation method for network configuration candidates,” *IEEEJ Transactions on Power and Energy*, **126**, pp. 1013–1022, 2006.
- [3] 科学研究費助成事業 学術変革領域研究 (B) 「組合せ遷移の展開に向けた計算機科学・工学・数学によるアプローチの融合」, <https://core.dais.is.tohoku.ac.jp/> (2023 年 4 月 13 日閲覧)
- [4] T. Ito, N. Kakimura, N. Kamiyama, Y. Kobayashi, and Y. Okamoto, “Shortest reconfiguration of perfect matchings via alternating cycles,” *SIAM Journal on Discrete Mathematics*, **36**, pp. 1102–1123, 2022.
- [5] P. Gopalan, P. G. Kolaitis, E. N. Maneva and C. H. Papadimitriou, “The connectivity of Boolean satisfiability: Computational and structural dichotomies,” *SIAM Journal on Computing*, **38**, pp. 2330–2355, 2009.
- [6] R. A. Hearn and E. D. Demaine, “PSPACE-completeness of sliding-block puzzles and other problems through the nondeterministic constraint logic model of computation,” *Theoretical Computer Science*, **343**, pp. 72–96, 2005.
- [7] M. R. Garey and D. S. Johnson, *Computers and Intractability: A Guide to the Theory of NP-Completeness*, W. H. Freeman & Co., 1979.
- [8] M. Gardner, “The hypnotic fascination of sliding-block puzzles,” *Scientific American*, **210**, pp. 122–130, 1964.
- [9] R. A. Hearn and E. D. Demaine, *Games, Puzzles, and Computation*, A K Peters, 2009.
- [10] 上原隆平 (訳), 『ゲームとパズルの計算量』, 近代科学社, 2011.
- [11] R. Uehara, “Computational complexity of puzzles and related topics,” *Interdisciplinary Information Sciences*, Article ID: 2022.R.06, 2023 (to appear).
- [12] N. Nishimura, “Introduction to reconfiguration,” *Algorithms*, **11**, paper ID 52, 2018.
- [13] N. Bousquet, A. E. Mouawad, N. Nishimura and S. Siebertz, “A survey on the parameterized complexity of the independent set and (connected) dominating set reconfiguration problems,” *arXiv*, arXiv:2204.10526, 2022.
- [14] D. A. Hoang, *Combinatorial Reconfiguration*, <http://reconf.wikidot.com/> (2023 年 4 月 12 日閲覧)
- [15] 東北大学大学院情報科学研究科, 株式会社明電舎, 「配電損失の最適化と切替手順の同時算出が可能に一電力の発電電分離を目前に自動計算の手法開発—」, [https://www.tohoku.ac.jp/japanese/newimg/pressimg/tohokuunivpress20190627\\_01web\\_haiden.pdf](https://www.tohoku.ac.jp/japanese/newimg/pressimg/tohokuunivpress20190627_01web_haiden.pdf) (2023 年 4 月 13 日閲覧)
- [16] T. Gima, T. Ito, Y. Kobayashi and Y. Otachi, “Algorithmic meta-theorems for combinatorial reconfiguration revisited,” In *Proceedings of the 30th Annual European Symposium on Algorithms (ESA 2022)*, *Leibniz International Proceedings in Informatics*, **244**, pp. 61:1–61:15, 2022.
- [17] Y. Yamauchi, N. Kamiyama and Y. Otachi, “Distributed reconfiguration of spanning trees,” In *Proceedings of the 23rd International Symposium on Stabilizing, Safety, and Security of Distributed Systems (SSS 2021)*, pp. 516–520, 2021.
- [18] T. Ito, Y. Iwamasa, Y. Kobayashi, Y. Nakahata, Y. Otachi, M. Takahashi and K. Wasa, “Independent set reconfiguration on directed graphs,” In *Proceedings of the 47th International Symposium on Mathematical Foundations of Computer Science (MFCS 2022)*, *Leibniz International Proceedings in Informatics*, **241**, pp. 58:1–58:15, 2022.
- [19] 東北大学大学院情報科学研究科, 京都大学大学院情報学研究科, 中部大学工学部, 株式会社明電舎, 「停電復旧の最短手順を算出するアルゴリズムを開発—多段融通にも対応、より広域な配電運用への活用に期待—」, [https://www.tohoku.ac.jp/japanese/newimg/pressimg/tohokuunivpress20221107\\_03web\\_blackout.pdf](https://www.tohoku.ac.jp/japanese/newimg/pressimg/tohokuunivpress20221107_03web_blackout.pdf) (2023 年 4 月 13 日閲覧)
- [20] C. St. J. A. Nash-Williams, “On orientations, connectivity and odd-vertex-pairings in finite graphs,” *Canadian Journal of Mathematics*, **12**, pp. 555–567, 1960.
- [21] H. E. Robbins, “A theorem on graphs, with an application to a problem of traffic control,” *The American Mathematical Monthly*, **46**, pp. 281–283, 1939.
- [22] T. Ito, Y. Iwamasa, N. Kakimura, N. Kamiyama, Y. Kobayashi, S. Maezawa, Y. Nozaki, Y. Okamoto and K. Ozeki, “Monotone edge flips to an orientation of maximum edge-connectivity à la Nash-Williams,” *ACM Transactions on Algorithms*, **19**, Article 6, 2023.
- [23] T. Ito, Y. Iwamasa, N. Kakimura, N. Kamiyama, Y. Kobayashi, Y. Nozaki, Y. Okamoto and K. Ozeki, “Reforming an envy-free matching,” In *Proceedings of the 36th AAAI Conference on Artificial Intelligence (AAAI 2022)*, **36**, pp. 5084–5091, 2022.
- [24] T. Ito, N. Kakimura, N. Kamiyama, Y. Kobayashi, Y. Nozaki, Y. Okamoto and K. Ozeki, “On reachable assignments under dichotomous preferences,” In *Proceedings of the 24th International Conference on Principles and Practice of Multi-Agent Systems (PRIMA 2022)*, pp. 650–658, 2022.